FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Aerospaziale

Docenti: A. Bertapelle, G. Giusteri, V. Grazian

IV appello del 28 agosto 2020

NOTA: I fogli con le soluzioni in BELLA COPIA devono riportare tutti i passaggi effettuati per risolvere l'esercizio. *Si deve raggiungere un minimo di 8 punti tra Teoria ed Esercizi*

Sia $\mathbf{n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 n_6 n_7}$ il proprio numero di matricola. Ad esempio se il numero di matricola è 1276540, $\mathrm{n}_1 = 1, \mathrm{n}_6 = 4, \mathrm{n}_7 = 0$.

Teoria

---

1. Si enunci e si dimostri il Teorema delle Dimensioni detto anche di Nullità più Rango. (3 punti)
2. Dati due sottospazi U e W di uno spazio vettoriale V, si dimostri che $U \cap W = \{0_V\}$ implica che ogni elemento del sottospazio somma $U + W$ si scrive in modo unico come somma $u + w$ di un elemento $u \in U$ e un elemento $w \in W$. (1 punto)

Esercizi

Esercizio 1. Sia $a = \mathrm{n}_3 + 1$ e si consideri l'applicazione lineare $f \colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 - x_5 \\ x_1 + x_2 + x_4 \\ -x_1 + a x_5 \end{pmatrix}.$$

(4 punti)

1. Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche del dominio e del codominio.
2. f è iniettiva? Se no, calcolare una base del nucleo.
3. f è suriettiva? Se no, calcolare una base dell'immagine.
4. Scrivere la matrice B di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ del dominio e alla base $\mathcal{B} = \{e_3 - e_1, e_1 + e_2, e_2 - e_1\}$ del codominio.

Esercizio 2. Sia $b = \mathrm{n}_6 + 1$ e si consideri la matrice a coefficienti reali (4 punti)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & b \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calcolare il polinomio caratteristico di A, il determinante di A e la sua traccia.
2. Calcolare gli autovalori di A, con la loro molteplicità algebrica.
3. Calcolare la dimensione e una base per ciascun autospazio di A. Se possibile, determinare una matrice che diagonalizzi A.
4. Trovare, se esiste una base ortonormale $u_1, \ldots, u_4$ di $\mathbb{R}^4$ con u_1, u_2, u_3 autovettori di A.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ si considerino il piano π e la retta r definiti da (4 punti)

$$r : \begin{cases} x - z = 4 \\ y + 2z = 3 \end{cases} \qquad \pi : \begin{pmatrix} \mathrm{n}_4 \\ 2 \\ \mathrm{n}_5 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

1. Determinare una rappresentazione parametrica di r.
2. Determinare un'equazione cartesiana di π. Esiste un piano del fascio di asse r ortogonale a π?
3. Determinare le equazioni cartesiane della retta s data dall'intersezione di π con il piano π' di equazione $x + z = 2$ e la posizione reciproca di s ed r.
4. Calcolare la distanza $d(r, s)$ e determinare i punti P_r e P_s di minima distanza.

SOLUZIONI

Esercizio 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & (a-1)/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & (1-a)/2 \end{pmatrix}.$$

L'applicazione f è suriettiva ma non iniettiva e il nucleo di f ha dimensione 2 e una sua base è $\{e_2 - e_4, ae_1 - ae_2 + (1-a)e_3 + e_5\}$.

Esercizio 2

Il polinomio caratteristico è $(x-2)^2(x-4)^2$, il determinante di A vale 64 e la sua traccia 12. I due autovalori sono $2, 4$ entrambi di molteplicità algebrica 2. L'autospazio di autovalore 2 ha dimensione 1 ed è generato da $v_1 = e_1 - e_3$. L'autospazio di autovalore 4 ha dimensione 2 ed è generato da $v_2 = e_1 + e_3, v_3 = e_2$. Pertanto la matrice A non è diagonalizzabile.
Si noti che $\{v_1, v_2, v_3, e_4\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$. Basta quindi normalizzare i vettori v_1, v_2 dividendoli per la loro norma e la base $\{v_1/\sqrt{2}, v_2/\sqrt{2}, v_3, e_4\}$ risulta ortonormale.

Esercizio 3

$$r : \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, \qquad \pi : y = 2, \qquad \tilde{\pi} : x - z = 4$$

dove $\tilde{\pi}$ è ortogonale a π e contiene r.

$$s : \begin{cases} y = 2 \\ x + z = 2 \end{cases} \qquad s : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Le rette r, s sono sghembe, $d(r, s) = \sqrt{3}$ e i punti di minima distanza sono $P_r = (4, 3, 0)$ e $P_s = (3, 2, -1)$.