FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Aerospaziale

Docenti: A. Bertapelle, G. Giusteri, G. Peruginelli

I appello del 18 gennaio 2021

NOTA: I fogli con le soluzioni in BELLA COPIA devono riportare <u>tutti</u> i passaggi effettuati per risolvere l'esercizio. *Si deve raggiungere un minimo di 8 punti tra Teoria ed Esercizi*

Sia $\mathbf{n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 n_6 n_7}$ il proprio numero di matricola. Ad esempio se il numero di matricola è 1276540, $\mathrm{n}_1 = 1, \mathrm{n}_6 = 4, \mathrm{n}_7 = 0$.

Teoria

1. Si enunci con precisione e si dimostri il Lemma dello Scambio relativo alla cardinalità di insiemi liberi rispetto a quella di generatori. (3 punti)

2. Dati due sottospazi U e W di uno spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ con U ortogonale a W e date delle basi ortogonali $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_W$ per tali sottospazi, si dimostri che l'insieme $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è libero. (1 punto)

Esercizi

Esercizio 1. Sia $a = \mathrm{n}_3 + 1$ e si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 \\ -x_3 \\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_4 \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_4 \end{pmatrix}.$$

(4 punti)

1. Scrivere la matrice A di f rispetto alla base canonica.

2. Determinare $\operatorname{Ker} f$ e dire se f è iniettiva. Se no, calcolare una base del nucleo.

3. Dati $U = \langle (2,-1,-1,0)^t, (0,-a,a,2a)^t \rangle$ e $W = \langle (1,2,0,1)^t, (1,0,2,-1)^t \rangle$ stabilire se $f(U)$ e W sono in somma diretta.

4. Considerando l'azione di f su U e W, se ne discuta la diagonalizzabilità e si dica se f è un'isometria.

Esercizio 2. Si consideri la matrice a coefficienti reali (4 punti)

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1-k & 0 & 0 & 1 & \mathbf{n}_5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & k+1 & \mathbf{n}_5 \\ -1 & k-1 & k+1 & -1 & -1 & \mathbf{n}_5 \\ 1 & 1-2k & -1 & -1 & 1+k^2 & \mathbf{n}_5 - k \end{array}\right).$$

1. Calcolare il rango della matrice A e il rango della matrice $(A|b)$ in funzione del parametro k e scrivere la matrice a scala usata per la discussione riportando tutti i passaggi.

2. Si consideri il sistema di equazioni lineari $Ax = b$. Per quali valori del parametro k il sistema ammette soluzione?

3. Si trovino esplicitamente le soluzioni del sistema ponendo $k = -2$.

4. Sia $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare di matrice A rispetto alla base canonica per $k = -2$. Esistono una base di $\mathbb{R}^5$ e una base di $\mathbb{R}^4$ tali che la corrispondente matrice associata ad f sia $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? Giustificare la risposta.

(girare pagina)

Esercizio 3. Si ponga $\mathbf{a} = 2$ se il proprio numero di matricola è dispari e $\mathbf{a} = -2$ se il proprio numero di matricola è pari. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ si considerino la retta r e i punti seguenti: (4 punti)

$$r : \begin{pmatrix} \mathbf{n}_4 + 1 \\ \mathbf{n}_4 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle, \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 + \mathbf{a} \end{pmatrix}.$$

1. Determinare le equazioni cartesiane di r.
2. Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per i punti P, Q, S.
3. Sia s la retta passante per il punto S e parallela al vettore $2e_1 + e_2 + e_3$. Calcolare la distanza $d(r, s)$ e determinare i punti di minima distanza.
4. Esistono rette del piano π incidenti r? Se sì, descriverle tutte (ad esempio fornendone le equazioni cartesiane o parametriche).