FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Aerospaziale

Docenti: L. C. García-Naranjo, G. G. Giusteri

I appello del 26 gennaio 2022

NOTA: I fogli con le soluzioni in BELLA COPIA devono riportare tutti i passaggi effettuati per risolvere l'esercizio. *Si deve raggiungere un minimo di 8 punti tra Teoria ed Esercizi.*

Sia $\mathbf{n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 n_6 n_7}$ il proprio numero di matricola. Ad esempio se il numero di matricola è 1276540, $\mathbf{n}_1 = 1, \mathbf{n}_6 = 4, \mathbf{n}_7 = 0$.

Teoria

---

1. Si enunci con precisione e si dimostri il teorema di diagonalizzabilità che fornisce condizioni necessarie e sufficienti sugli autovalori di una matrice quadrata $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ affinché essa sia diagonalizzabile. (3 punti)
2. Dimostrare che, dati due sottospazi U e W di uno spazio vettoriale euclideo V, se $U \cap W = \{0_V\}$, allora gli elementi di $U + W$ si scrivono in modo unico come somma di due vettori $u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$. (1 punto)

Esercizi

Esercizio 1. Sia $\mathbf{b} = (\mathbf{n}_6 + 1)/2$ e si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ \frac{1}{2}x_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_4 \\ -\mathbf{b}x_1 + \mathbf{b}x_2 \end{pmatrix}.$$

(4 punti)

1. Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio.
2. Determinare $\operatorname{Ker} f$, la sua dimensione e una sua base **ortonormale**.
3. Verificare che i vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

appartengono al complemento ortogonale W di $\operatorname{Ker} f$ e ne formano una base.

4. Considerare la restrizione di f a W, cioè l'applicazione lineare $g : W \to \mathbb{R}^3$ tale che $g(w_i) = f(w_i)$ per i=1,2,3. Scrivere la matrice B di g rispetto alle basi $\{w_1, w_2, w_3\}$ di W e quella canonica nel codominio. Stabilire se B rappresenti anche un'isometria di $\mathbb{R}^3$.
5. Trovare gli autovalori della matrice B e dire se sia diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

(girare pagina)

Esercizio 2. Si consideri la matrice a coefficienti reali (4 punti)

$$\left(A_k \mid b \right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & k-4 & 0 & 1 & k-3 & \mathbf{n}_5 \\ -2 & 8-2k & 2 & -2 & 2-k & -2\mathbf{n}_5 \\ 1 & k-4 & 0 & k+3 & k+7 & 5+\mathbf{n}_5 \\ -1 & 4-k & 2 & -1 & k^2-k-7 & k-3-\mathbf{n}_5 \end{array} \right).$$

1. Calcolare il rango della matrice A_k e il rango della matrice $(A_k|b)$ in funzione del parametro $k \in \mathbb{R}$ e scrivere la matrice a scala usata per la discussione riportando tutti i passaggi.
2. Si consideri il sistema di equazioni lineari $A_k x = b$. Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il sistema ammette soluzione?
3. Si trovino esplicitamente le soluzioni del sistema ponendo $k = 3$.
4. Sempre nel caso $k = 3$, sia $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare di matrice A_3 rispetto alla base canonica. Determinare la dimensione e una base per $\operatorname{Im} f$.

Esercizio 3. Si ponga $\mathbf{a} = 1$ se il proprio numero di matricola è dispari e $\mathbf{a} = -1$ se il proprio numero di matricola è pari. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ si considerino le rette (4 punti)

$$r : \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}+1 \\ \mathbf{a}-1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a} \\ -\mathbf{a} \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad s : \begin{cases} 2x + \mathbf{a}y - 1 = 0 \\ z - \mathbf{a} = 0 \end{cases}.$$

1. Determinare le equazioni cartesiane di r.
2. Determinare le equazioni parametriche di s.
3. Determinare il piano π che contiene alla retta s ed è parallelo alla retta r.
4. Calcolare la distanza tra il piano π e la retta r.
5. Sia $P = (-3\mathbf{a}, 4, -4)$. Trovare un altro punto $Q \in \mathbb{E}^3$ tale che $d(P, r) = d(Q, r)$ e tale che la retta passante per P e Q sia ortogonale a r.