FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Aerospaziale

Docenti: L. C. García-Naranjo, G. G. Giusteri

II appello del 9 febbraio 2022

NOTA: I fogli con le soluzioni in BELLA COPIA devono riportare tutti i passaggi effettuati per risolvere l'esercizio. *Si deve raggiungere un minimo di 8 punti tra Teoria ed Esercizi.*

Sia $\mathbf{n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 n_6 n_7}$ il proprio numero di matricola. Ad esempio se il numero di matricola è 1276540, $\mathbf{n}_1 = 1, \mathbf{n}_6 = 4, \mathbf{n}_7 = 0$.

Teoria

1. Enunciare con precisione, indicando tutte le ipotesi, e dimostrare il teorema che fornisce una formula per la dimensione del sottospazio $U + W$ somma di sottospazi U e W di uno spazio vettoriale V. (3 punti)
2. Sia $f : V \to W$ una funzione lineare tra due spazi vettoriali V e W. Dimostrare che $f(v_1) = f(v_2)$ se e solo se $v_1 - v_2 \in \ker(f)$. (1 punto)

Esercizi

Esercizio 1. Sia $\mathbf{b} = \mathbf{n}_6$ e si considerino le applicazioni lineari $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definite da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+1)x_2 \\ \mathbf{b}x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}, \qquad g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(4 punti)

(a) Scrivere le matrici A di f e B di g rispetto alle basi canoniche del dominio e codominio.

(b) Considerare la funzione lineare determinata dalla composizione $g \circ f$. Specificare il suo dominio e codominio e scrivere la sua matrice rispetto alle basi canoniche di essi. Esiste qualche valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ per il quale la funzione lineare $g \circ f$ sia invertibile? In caso negativo spiegare perché, in caso positivo trovare tali valori.

(c) Si ponga $a = 1$ e si determini l'immagine di f , la sua dimensione ed una sua base. Esiste qualche vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f) \oplus \langle v \rangle$? In caso negativo spiegare perché, in caso positivo trovarne uno.

(d) Sia $W = \ker(g)^\perp$ e $U = \langle (\mathbf{b}+1, \mathbf{b}+1, 0)^T, (1, -1, 0)^T \rangle$. Determinare una base per l'intersezione $U \cap W$.

(girare pagina)

Esercizio 2. Si consideri la matrice a coefficienti reali (4 punti)

$$A = \begin{pmatrix} 5k & -2k & -k \\ -2k & 2k & -2k \\ -k & -2k & 5k \end{pmatrix}.$$

(a) È possibile stabilire se la matrice A è diagonalizzabile per qualsiasi valore di $k \in \mathbb{R}$ *senza* fare dei calcoli? Giustificare la sua risposta.

Per il resto dell'esercizio si ponga $k = 1$ se il proprio numero di matricola è dispari e $k = -1$ se il proprio numero di matricola è pari.

(b) Calcolare la dimensione ed una base di $\ker(A)$.

(c) Si trovino gli autovalori di A ed una base per ciascuno degli autospazi corrispondenti.

(d) Trovare una matrice *ortogonale* P in modo che $P^T AP$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ si considerino le rette (4 punti)

$$r : \begin{cases} x - 2z = -(\mathbf{n}_5 + 1) \\ y + 3z = 4(\mathbf{n}_5 + 1) \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x = 2\mathbf{n}_5 + 2\lambda \\ y = \mathbf{n}_5 + \lambda \\ z = -3\mathbf{n}_5 - 3\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare le equazioni parametriche di r.

(b) Determinare le equazioni cartesiane di s.

(c) Determinare la posizione reciproca di r e s.

(d) Determinare $P \in r$ e $Q \in s$ punti di minima distanza e calcolare la distanza tra r e s.

(e) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per Q e che contiene r.