FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Aerospaziale

Docenti: L. C. García-Naranjo, G. G. Giusteri

III appello del 1 luglio 2022

NOTA: I fogli con le soluzioni in BELLA COPIA devono riportare <u>tutti</u> i passaggi effettuati per risolvere l'esercizio. *Si deve raggiungere un minimo di 8 punti tra Teoria ed Esercizi.*

Sia $\mathbf{n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 n_6 n_7}$ il proprio numero di matricola. Ad esempio se il numero di matricola è 1276540, $\mathbf{n}_1 = 1, \mathbf{n}_6 = 4, \mathbf{n}_7 = 0$.

Teoria

---

1. Si enunci con precisione e si dimostri il teorema che stabilisce un legame tra la dimensione del nucleo di una funzione lineare e la dimensione della sua imagine (anche detto Teorema di Nullità più Rango). (3 punti)

2. Sia V uno spazio vettoriale. Dimostrare che se $v_1, \ldots, v_n \in V$ sono vettori linearmente dipendenti, allora almeno uno di essi si può scrivere come combinazione lineare degli altri. (1 punto)

Esercizi

Esercizio 1. Si ponga $\mathbf{b} = 1 + \mathbf{n}_6$ e si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ tale che (4 punti)

$$f(a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3) = \begin{pmatrix} a_3 \mathbf{b} & a_0 - a_1 \\ a_0 - a_1 & a_2 - a_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Scrivere la matrice A che rappresenta f rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio.

(b) Trovare una base per $\ker f \subseteq \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ e una per $\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

(c) Dire se la matrice $M = f(4 + (1+\mathbf{b})X^2 + X^3)$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e calcolarne autovalori e autovettori.

(d) Dimostrare che l'insieme

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base per $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. Scrivere la matrice B che rappresenta f rispetto alle basi canonica del dominio e $\mathcal{C}$ del codominio. Trovare una matrice invertibile S tale che $SB = A$.

(girare pagina)

Esercizio 2. Si consideri la matrice a coefficienti reali (4 punti)

$$\left(\ A_k \;\middle|\; b_k\ \right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \mathbf{n}_5 & -2 & k & k & 3 \\ 1 & 2+\mathbf{n}_5 & -1 & k-1 & 2\mathbf{n}_5+k & \mathbf{n}_5+4 \\ 1 & \mathbf{n}_5-2 & -3 & k^2-k+2 & k-2\mathbf{n}_5 & 2-\mathbf{n}_5 \\ -1 & -\mathbf{n}_5 & 2 & k^2-3k+1 & k^2-k-1 & k-4 \end{array}\right).$$

(a) Calcolare il rango della matrice A_k e il rango della matrice $(A_k|b_k)$ in funzione del parametro $k \in \mathbb{R}$ e scrivere la matrice a scala usata per la discussione riportando tutti i passaggi.

(b) Si consideri il sistema di equazioni lineari $A_k x = b_k$. Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il sistema ammette soluzione?

(c) Si trovino esplicitamente tutte le soluzioni del sistema ponendo $k = 2$.

(d) Sempre nel caso $k = 2$. Esiste un sottospazio U di $\mathbb{R}^5$ con $\dim U = 4$ e tale che l'equazione $A_2 x = b_2$ risolta nel punto (c) ammetta una sola soluzione appartenente ad U? Se sí, descrivere tale sottospazio.

Esercizio 3. Si ponga $\mathbf{a} = 1$ se il proprio numero di matricola è dispari e $\mathbf{a} = -1$ se il proprio numero di matricola è pari. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ si considerino i punti (4 punti)

$$A = (2\mathbf{a}, 0, 2+\mathbf{a})\,, \quad B = \left(0, -\mathbf{a}, 3+\mathbf{a}-\mathbf{a}^2\right), \quad C = (4\mathbf{a}, \mathbf{a}, 7)\,,$$

e la retta ℓ passante per A e B.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π che contiene i punti A, B e C.

(b) Determinare le equazioni parametriche della retta r passante per A e perpendicolare a π.

(c) Determinare le equazioni cartesiane della retta s che è contenuta in π, passa per C ed è perpendicolare a ℓ.

(d) Determinare il punto di intersezione tra s ed ℓ e, invece, calcolare la distanza $d(r, s)$.