Tema 1

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria dell'Energia & Ingegneria Aerospaziale

Docenti: A. Bertapelle, G. Giusteri, V. Grazian

**** Gennaio 2020**

PRIMA PARTE

Ogni risposta corretta vale 1,25 punti e si deve raggiungere un minimo di 10 punti in questa parte

1. Qual è la rappresentazione algebrica del numero complesso z di modulo 2 e argomento $2\pi - \pi/6$?

☐ $\sqrt{3} - \mathrm{i}$ ☐ $\sqrt{3} + \mathrm{i}$

☐ $2 + \sqrt{3}\mathrm{i}$ ☐ $\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$

2. Dati due sottospazi ortogonali W_1 e W_2 di $\mathbb{R}^n$, quale dei seguenti insiemi <u>*non è*</u> sottospazio di $\mathbb{R}^n$?

☐ $W_1 \cap W_2$ ☐ $W_1 \cup W_2$

☐ $W_1^\perp + W_2^\perp$ ☐ $W_1 + W_2$

3. Dato $\{(5,1)^t + \lambda(k,2)^t \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ esso è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$?

☐ 0 ☐ 2

☐ 10 ☐ -5

4. Nello spazio di polinomi $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, i due polinomi $x + x^2$ e $1 + x$ sono ...

☐ indipendenti ☐ generatori di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

☐ una base per $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ ☐ dipendenti

5. In uno spazio vettoriale finitamente generato di dimensione n, la cardinalità k di un insieme di generatori è sempre tale che ...

☐ $k = n$ ☐ $k < n$

☐ $k \geq n$ ☐ $k \leq n$

6. Quanto vale il determinate della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad ?$$

☐ 0 ☐ -8

☐ -16 ☐ 10

7. Data un'applicazione lineare f tra due spazi vettoriali V e W, l'insieme $\{v \in V \mid f(v) = 0_W\}$ è...

☐ l'immagine di f ☐ l'immagine di 0_V

☐ il nucleo di f ☐ la preimmagine di W

8. Sia Π la proiezione ortogonale in $\mathbb{R}^3$ sul sottospazio $\langle (1,1,1)^t \rangle$, la sua nullità è ...

☐ 0 ☐ 1

☐ 2 ☐ 3

9. La molteplicità algebrica *m.a.* e la molteplicità geometrica *m.g.* di ogni autovalore soddisfano ...

☐ $m.a. \geq m.g.$ ☐ $m.a. \leq m.g.$

☐ $m.a. > m.g.$ ☐ $m.a. < m.g.$

10. Quale dei seguenti vettori completa ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ l'insieme $\{(3,4,0)^t, (4,-3,2)^t\}$?

☐ $(3,6,3)^t$ ☐ $(2,4,-4)^t$

☐ $(-8,6,0)^t$ ☐ $(8,-6,-25)^t$

11. Una matrice a coefficienti reali $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ è ortogonalmente diagonalizzabile, cioè mediante un cambio di base ortonormale, se e solo se ...

☐ è ortogonale ☐ è scalare

☐ è simmetrica ☐ è diagonale

12. Quali sono gli autovalori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad ?$$

☐ $\{-12, 0, 5\}$ ☐ $\{-6, -5, 2\}$

☐ $\{-5, 2, 10\}$ ☐ $\{-10, -4, -1\}$

(voltare pagina)

SECONDA PARTE

Si deve raggiungere un minimo di 8 punti in questa parte

Teoria

1. Enunciare e dimostrare la formula di Grassmann. (3 punti)

2. Dimostrare l'enunciato seguente.
Sia $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Allora due autovettori di A relativi ad autovalori distinti sono ortogonali tra loro. (1 punto)

Esercizi

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare (4 punti)

$$f\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}, \quad f(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_0 + a_3 + (a_1 + a_2)x$$

1. Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche del dominio e del codominio.

2. Determinare una base per il nucleo di f. Dire se f è iniettiva.

3. Determinare una base per l'immagine f. Dire se f è suriettiva.

4. Scrivere la matrice B di f rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{x, -1, x + x^2, -x + x^3\}$ del dominio e $\mathcal{B}' = \{2, x^2, 1 - x\}$ del codominio esplicitando le matrici di cambio di base usate.

5. Determinare l'antiimmagine del polinomio $1 + x$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice (4 punti)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

1. Calcolare il polinomio caratteristico di A, il determinante di A e la sua traccia.

2. Calcolare gli autovalori di A, con la loro molteplicità algebrica.

3. Calcolare una base per ciascun autospazio di A e se possibile determinare una matrice che diagonalizzi A.

4. A è ortogonalmente diagonalizzabile?

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ si considerino le rette (4 punti)

$$r : \begin{cases} x + z = 2 \\ x - y = 1. \end{cases} \quad , \qquad s : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. Determinare una rappresentazione parametrica di r.

2. Determinare l'equazione cartesiana di s.

3. Determinare la posizione reciproca di r ed s, giustificando la risposta.

4. Determinare la distanza $d(r, s)$ e i punti di minima distanza.

5. Determinare un piano parallelo a r e ad s e avente distanza 3 dal punto $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, etc.).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.