Tema 2

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria dell'Energia & Ingegneria Aerospaziale

Docenti: A. Bertapelle, G. Giusteri, V. Grazian

**** Gennaio 2020**

PRIMA PARTE

Ogni risposta corretta vale 1,25 punti e si deve raggiungere un minimo di 10 punti in questa parte

1. Qual è la rappresentazione algebrica del numero complesso $z = (\sqrt{3} + \mathrm{i})^5$?

☐ $32 - 32\sqrt{3}\mathrm{i}$ ☐ $-16\sqrt{3} + 16\mathrm{i}$

☐ $2 + \sqrt{3}\mathrm{i}$ ☐ $32\sqrt{3} + 32\mathrm{i}$

2. Dati due sottospazi W_1 e W_2 di $\mathbb{R}^n$, il sottospazio somma è una somma diretta <u>*se e solo se*</u> ...

☐ $W_1 \cup W_2 = \mathbb{R}^n$ ☐ $W_1 \cap W_2 = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

☐ $W_2 = W_1^\perp$ ☐ $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^n$

3. Dato $\{k + \lambda\mathrm{i} \in \mathbb{C} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, per quale $k \in \mathbb{R}$ esso è sottospazio di $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale?

☐ 0 ☐ 1

☐ -1 ☐ per ogni $k \in \mathbb{R}$

4. Nel $\mathbb{C}$-spazio vettoriale $\mathbb{C}^3$, i due vettori $(2, \mathrm{i}, 0)^t$ e $(-2\mathrm{i}, 1, 0)^t$ sono ...

☐ indipendenti ☐ generatori di $\mathbb{C}^3$

☐ una base per $\mathbb{C}^3$ ☐ dipendenti

5. In uno spazio vettoriale finitamente generato di dimensione n, la cardinalità k di un insieme di vettori linearmente indipendenti è sempre tale che ...

☐ $k = n$ ☐ $k < n$

☐ $k \geq n$ ☐ $k \leq n$

6. Quanto vale il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad ?$$

☐ 1 ☐ 2

☐ 3 ☐ 4

7. Data un'applicazione lineare f tra due spazi vettoriali V e W, l'insieme $\{f(v) \in W \mid v \in V\}$ è...

☐ l'immagine di f ☐ l'immagine di W

☐ il nucleo di f ☐ la preimmagine di W

8. Sia σ la riflessione in $\mathbb{R}^3$ che ha per asse il sottospazio $\langle\{(0,3,1)^t, (0,0,1)^t\}\rangle$, il suo rango vale ...

☐ 0 ☐ 1

☐ 2 ☐ 3

9. Lo spettro di un endomorfismo su di uno spazio vettoriale di dimensione finita corrisponde ...

☐ alla sua immagine ☐ al suo nucleo

☐ ai suoi autovalori ☐ al suo rango

10. Qual è il vettore proiezione di $(3, -2, 7)^t \in \mathbb{R}^3$ sul sottospazio $\langle(0,0,1)^t\rangle$?

☐ $(0, 0, 7)^t$ ☐ $(3, -2, -7)^t$

☐ $(3, -2, 0)^t$ ☐ $(-3, 2, 7)^t$

11. Una matrice a coefficienti reali $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale, cioè le sue colonne formano un insieme ortonormale in $\mathbb{R}^n$, <u>*se e solo se*</u> A rappresenta ...

☐ un cambio di base ☐ un'isometria

☐ una riflessione ☐ un automorfismo

12. Quali sono gli autovalori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ?$$

☐ $\{-10, 0, 2, 4\}$ ☐ $\{-10, -1, 2, 5\}$

☐ $\{-5, -2, -1, 0\}$ ☐ $\{0, 1, 2, 5\}$

(voltare pagina)

SECONDA PARTE

Si deve raggiungere un minimo di 8 punti in questa parte

Teoria

1. Si dimostri che per ogni ogni autovalore λ di un endomorfismo $f\colon V \to V$ con V spazio vettoriale finitamente generato si ha $1 \leq m.g.\lambda \leq m.a.\lambda \leq dim_K(V)$. (3 punti)
2. Dimostrare l'enunciato seguente.
   Il nucleo di un'applicazione lineare è un sottospazio vettoriale del dominio. (1 punto)

Esercizi

Esercizio 1. Considerare l'applicazione lineare di $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ tale che $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1-2x_3 \\ -2x_1+2x_3 \\ -x_1-4x_2+2x_4 \\ -x_1+4x_2+2x_3-2x_4 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$. (4 punti)

1. Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche del dominio e del codominio.
2. Scrivere la matrice B di f rispetto alle base $\mathcal{V} = \{e_2, e_3, e_1, e_4\}$ del dominio e la base canonica del codominio $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.
3. Scrivere una base di $\ker(f)$ e determinare la nullità di f. L'applicazione f è iniettiva?
4. Scrivere una base di $\mathrm{Im}(f)$ e determinare il rango di f. L'applicazione f è suriettiva?
5. Determinare un sottospazio complementare di $\mathrm{Im}(f)$ in $\mathbb{R}^5$.

Esercizio 2. Si considerino, al variare di λ tra i numeri reali, i sistemi (4 punti)

$$\Sigma_\lambda\colon \quad \begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + x_3 - x_5 = \lambda \\ 2x_1 + 2\lambda x_2 + (\lambda+1)x_3 + 2x_4 + (\lambda-2)x_5 = 3\lambda \\ -x_1 - \lambda x_2 - x_3 + (\lambda+1)x_4 + 2x_5 = -\lambda \\ (\lambda-1)x_3 + 2x_4 + (2\lambda+1)x_5 = 3\lambda \end{cases}$$

e si indichi con $S_\lambda \subset \mathbb{R}^5$ l'insieme delle soluzioni del sistema Σ_λ.

1. Determinare S_0, ossia le soluzioni del sistema per $\lambda = 0$.
2. Determinare $S_0^\perp$ indicandone una base e la dimensione.
3. Calcolare la proiezione ortogonale di del vettore $e_1 - 2e_2 + e_5$ su S_0.
4. Determinare per quali λ il sistema Σ_λ non ha soluzioni.

Esercizio 3. In $\mathbb{E}^3$ si considerino i punti P, Q di coordinate rispettivamente $(1,0,1)^t, (2,1,-1)^t$. (4 punti)

1. Determinare equazioni cartesiane e parametriche della retta r passante per P e Q.
2. Determinare il piano Π passante per P e Q ortogonale al vettore $(1,1,1)^t$.
3. Determinare la distanza del punto R di coordinate $(0,0,1)^t$ da Π e la distanza di R da r.
4. Scrivere l'equazione di una retta passante per R e sghemba con r.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, etc.).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.