ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 12-13, 18/10/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Richiamo dalla lezione precedente:

V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

$U, W \subset V$ sottospazi di V.

- $U \cap W$ è un sottospazio di V.
- $U \cup W$ <u>non</u> è in generale un sottospazio di V.

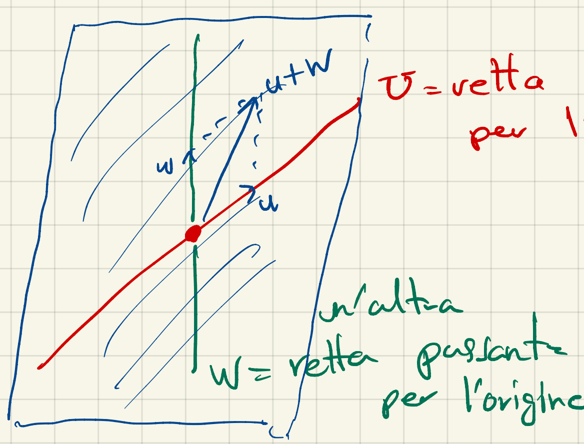
<u>Def.</u> (vedi libro, Cap. 1, p. 16)

Siano U, W sottosp. vettoriali di V.

$U+W$ è il più piccolo sottosp. vett. di V che contiene $U \cup W$.

<u>Es.</u> $V = \mathbb{R}^3$

$U+W$ = piano che contiene a U e W.



<u>Teorema</u> (vedi libro, cap. 1, pag. 17)

$$U+W = \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$$

Dim.

Ci sono 3 cose a dimostrare:

1) $\{u+w \mid u \in U, w \in W\}$ è un sottosp. di V.

2) $U \cup W \subseteq \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$

3) Fra tutti i sottosp. che contengono $U \cup W$, $\{u+w \mid u \in U, w \in W\}$ è il più piccolo.

1) $v_1, v_2 \in \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$

$v_1 + v_2 \overset{?}{\in} \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$

$$\begin{cases} v_1 = u_1 + w_1 & u_1 \in U,\ w_1 \in W \\ v_2 = u_2 + w_2 & u_2 \in U,\ w_2 \in W. \end{cases}$$

$$v_1 + v_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = \underbrace{(u_1 + u_2)}_{u_3} + \underbrace{(w_1 + w_2)}_{w_3}$$

$u_3 \in U$ perché U è sottosp.

$w_3 \in W$ perché W è sottosp.

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$. ✓

$v \in \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$

$\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda v \overset{?}{\in} \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$ ✓

$$v = \underset{\in U}{u} + \underset{\in W}{w} \Rightarrow \lambda v = \lambda(u+w) = (\lambda u) + (\lambda w)$$

$\lambda u \in U$ perché U è sottosp.

$\lambda w \in W$ perché W è sottosp.

$\Rightarrow \lambda v \in \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$ ✓

$\Rightarrow \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$ è un sottosp. di V.

2) $U \cup W \subseteq \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$

Vedremo che $\begin{matrix} U \subseteq \\ W \subseteq \end{matrix} \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$.

$U \subseteq \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$

$u \in U \Rightarrow u = \underset{\substack{\uparrow \\ U}}{u} + \underset{\substack{\uparrow \\ W}}{\vec{0}} \Rightarrow u \in \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$

$\Rightarrow U \subseteq \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$

Analogamente, sia $w \in W$

$w = \underset{\substack{\uparrow \\ U}}{\vec{0}} + \underset{\substack{\uparrow \\ W}}{w} \in \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$

$\Rightarrow W \subseteq \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$

Allora $U \cup W \subseteq \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$.

3) Supponiamo che L è un sottosp. di V tale che $U \cup W \subseteq L$.

Vogliamo dimostrare che $\{u+w \mid u \in U, w \in W\} \subseteq L$.

Sia $v \in \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$, vedremo che $v \in L$.

Esistono $u \in U$, $w \in W$ tali che $v = u+w$.

$U \cup W \subseteq L \Rightarrow \begin{cases} U \subseteq L \Rightarrow u \in L \\ W \subseteq L \Rightarrow w \in L \end{cases}$

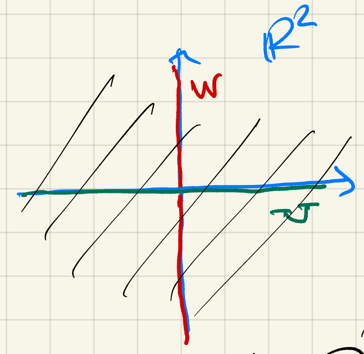
L è sottosp. $\Rightarrow \underbrace{u+w}_{v} \in L \Rightarrow v \in L$.

Quindi $\{u+w \mid u \in U, w \in W\} \subseteq L$ $\boxtimes$

<u>Esempio</u> $V = \mathbb{R}^2$

$U = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$W = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$



$U+W = \mathbb{R}^2$.

$$U+W = \{(x,0)+(0,y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

<u>Teorema</u> Un vettore $v \in U+W$ si scrive in <u>modo unico</u> nella forma $v = u+w$ con $u \in U$, $w \in W$ se e solo se $U \cap W = \{\vec{0}\}$.

<u>Dim</u>

"$\Rightarrow$") Sup. che v si scrive in modo unico $\forall\, v \in U+W$.

Sia $v \in U \cap W \Rightarrow v \in U$ e $v \in W$

Allora $v = \underset{U}{v} + \underset{W}{\vec{0}} = \underset{U}{\vec{0}} + \underset{W}{v}$ Scrittura è unica: $\Rightarrow v = \vec{0}$.

$\Rightarrow U \cap W = \{\vec{0}\}$.

$\Leftarrow)$ Supp. $U \cap W = \{\vec{0}\}$.

Supponiamo di avere $v = \underbrace{u_1 + w_1 = u_2 + w_2}$

$$\underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} u_1 - u_2 \\ w_2 - w_1 \end{matrix} \in U \cap W = \{\vec{0}\}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} u_1 - u_2 = \vec{0} \\ w_2 - w_1 = \vec{0} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_1 = u_2 \\ w_2 = w_1 \end{matrix}$$

quindi l'espressione $u_1 + w_1$ è unica

Def. La somma $U + W$ di due sottosp. vettoriali U, W si dice <u>diretta</u> se $U \cap W = \{\vec{0}\}$.

La <u>somma diretta</u> si indica con $U \oplus W$.

$$U \oplus W \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} U + W \\ \text{con} \quad U \cap W = \{\vec{0}\} \end{matrix} \right.$$

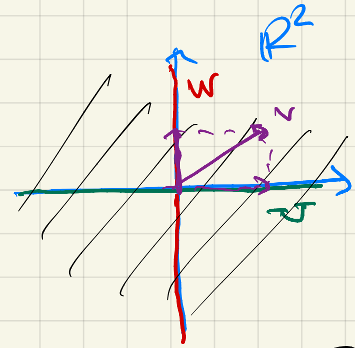
Per il teorema:

$v \in U \oplus W \Rightarrow$ esiste un <u>unico</u> $u \in U$ e un <u>unico</u> $w \in W$

tali che $v = u + w$.

Es. $V = \mathbb{R}^2$ $\quad U = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

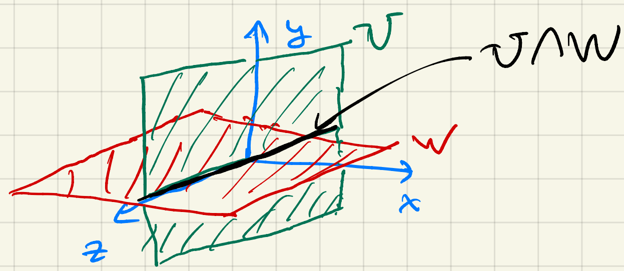
$W = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$



$U \oplus W = \mathbb{R}^2.$

Es. $V = \mathbb{R}^3$ $\quad W = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, z \in \mathbb{R}\}$

$U = \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\}$



$$U \cap W = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

$$U + W = \mathbb{R}^3$$

$$v \in (x,y,z) = \underbrace{(0,y,0)}_{\in U} + \underbrace{(x,0,z)}_{\in W} \Rightarrow U + W = \mathbb{R}^3$$

$$= \underset{\in U}{(0,y,z)} + \underset{\in W}{(x,0,0)}$$

la scrittura non è unica.

La somma non è **diretta**.

V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

$S \subseteq V$ un sottoinsieme.

Def. Il sottospazio vettoriale generato da S

è il più piccolo sottosp. vettoriale di V che contiene a S.

Si indica $\langle S \rangle$ oppure $\mathcal{L}(S)$.

Si dimostra che:

$$\langle S \rangle = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid v_i \in S, \ \lambda_i \in \mathbb{K} \} =$$

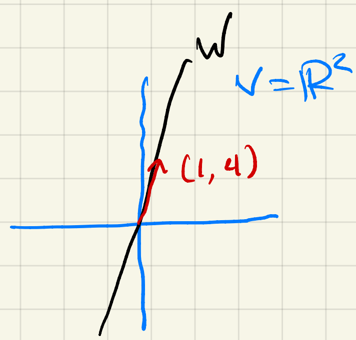
Insieme di tutte le comb. lineare dei vettori di S.

$$\boxed{\text{OSS: } \quad U + W = \langle U \cup W \rangle}$$

Esempio ① $V = \mathbb{R}^2 = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

$$W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 0 \}$$

sottosp. di V.



$$W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4x \}$$

$$= \{ (x, 4x) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ x(1, 4) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

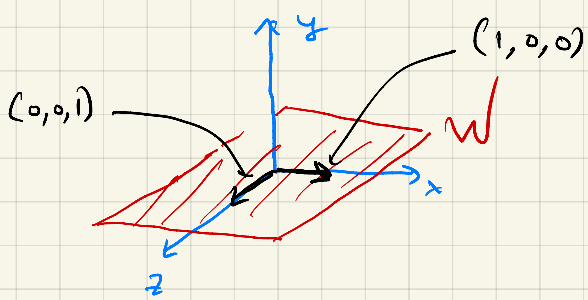
$$= \{ \lambda (1, 4) \mid \lambda \in \mathbb{R} \} = \langle (1, 4) \rangle$$

W è generato per (1, 4).

② $V = \mathbb{R}^3 \quad W = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, z \in \mathbb{R}\}$

$$W = \{ (x,0,0) + (0,0,z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{ x(1,0,0) + z(0,0,1) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{ \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,0,1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle$$

I vettori $(1,0,0)$, $(0,0,1)$ sono generatori di W.



In generale:

Def. $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ vettori di V.

Sono un sistema di generatori di V

se $\langle S \rangle = V$, cioè se ogni vettore $v \in V$

si può scrivere come combinazione lineare

dei vettori dati.

$v \in V$ esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Es. $V=\mathbb{R}^2$

$v_1=(2,1)$, $v_2=(0,3)$, $v_3=(1,-1)$

Sono generatori di $\mathbb{R}^2$?

$v\in\mathbb{R}^2$ $v=(a,b)$ $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$.

$$v\overset{?}{=}\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\lambda_1 \quad +\lambda_3\\ \lambda_1+3\lambda_2-\lambda_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2\lambda_1 \quad +\lambda_3=a\\ \lambda_1+3\lambda_2-\lambda_3=b\end{cases}$$

$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ sono le incognite.

a, b sono parametri liberi di variare

$$\begin{cases}\lambda_3=a-2\lambda_1\\ \lambda_1+3\lambda_2-(a-2\lambda_1)=b\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_3=a-2\lambda_1\\ 3\lambda_1-a+3\lambda_2=b\end{cases} \qquad \begin{cases}\lambda_3=a-2\lambda_1\\ \lambda_2=\dfrac{b+a-3\lambda_1}{3}\end{cases}$$

Ci sono sempre (cioè $\forall a, \forall b$) infinite soluzioni

$$\lambda_2=\frac{b+a-3\lambda_1}{3}, \quad \lambda_3=a-2\lambda_1 \quad \text{per ogni } \lambda_1$$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ sono un sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$.

Es. $V=\mathbb{R}^2$

$v_1=(2,1)$, $v_2=(0,3)$ sono generatori di $\mathbb{R}^2$?

$v=(a,b)\in\mathbb{R}^2 \qquad v \stackrel{?}{=} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}2\lambda_1 = a\\ \lambda_1+3\lambda_2 = b\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_1 = \frac{a}{2}\\ \lambda_2 = \frac{b}{3}-\frac{a}{6}\end{cases}$$

Soluzione unica.

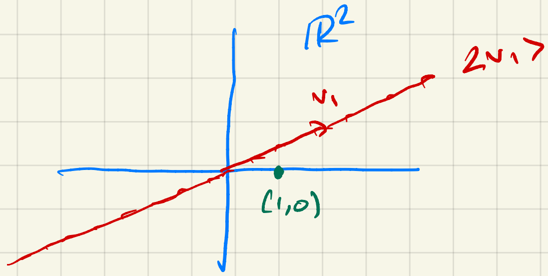
$\Rightarrow$ v_1, v_2 sono generatori di $\mathbb{R}^2$.

Es. $V=\mathbb{R}^2$

$v_1=(2,1)$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

non esiste soluzione per tutti $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.



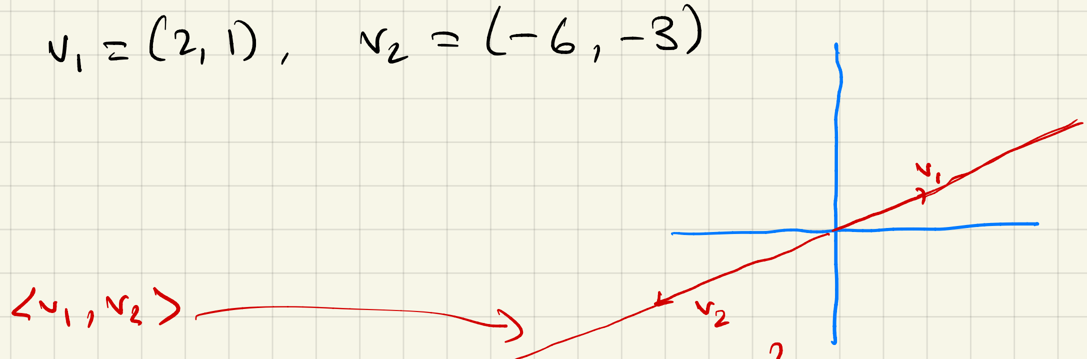
$(2,1)$ non è un generatore di $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases}2\lambda_1 = a\\ \lambda_1 = b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2b = a\\ \lambda_1 = b\end{cases}$$

non ha soluzione in generale. Ad esempio se $a=1$, $b=0$

$V=\mathbb{R}^2$

Es. $v_1=(2,1)$, $v_2=(-6,-3)$



v_1, v_2 non generano $\mathbb{R}^2$.