ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 16-17, 21/10/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Richiamo dalla lezione precedente:

V Spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

$v_1, \dots, v_n \in V$ sono linearmente indipendenti se:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0} \implies \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_n = 0.$$

$v_1, \dots, v_n$ linearmente indipendenti $\Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ è libero

$\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base se:

1) $\{v_1, \dots, v_n\}$ è libero ($v_1, \dots, v_n$ sono lin. indip.)

2) $\{v_1, \dots, v_n\}$ è un sistema di generatori ($V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$)

Teorema (vedi Libro Cap. 1, p. 21) Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V. Ogni vettore di V si può scrivere in modo unico come combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_n$.

Dim.

Sia $v \in V$. Sicuramente si può scrivere come

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

(perché $v_1, \dots, v_n$ sono generatori)

Supponiamo che anche

$$v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

$$\underbrace{(\lambda_1 - \mu_1)}_{\alpha_1} v_1 + \dots + \underbrace{(\lambda_n - \mu_n)}_{\alpha_n} v_n = \vec{0}$$

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}}_{\text{Combinazione lineare uguale a } \vec{0}}$$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 0, \ \dots, \ \alpha_n = 0$ (perché $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indip.)

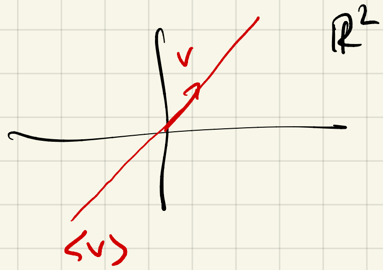
$$\lambda_1 - \mu_1 = 0, \ \lambda_2 - \mu_2 = 0, \ \dots, \ \lambda_n - \mu_n = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \mu_1, \ \lambda_2 = \mu_2, \ \dots, \ \lambda_n = \mu_n .$$

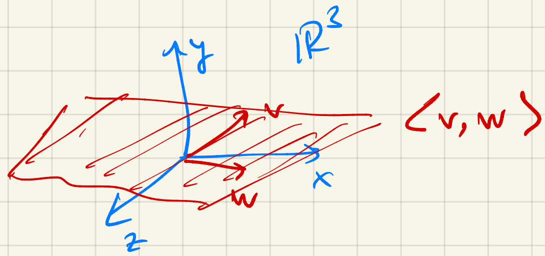
Quindi la scrittura di v come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ è unica ∎

Una base ci permette di associare una sequenza di numeri (scalari) ad ogni vettore in <u>modo unico</u>.

Abbiamo visto (geometricamente) che per $\mathbb{R}^2$ servono almeno 2 vettori per avere un sistema di generatori (1 vettore non può essere generatore)



Per $\mathbb{R}^3$ servono almeno 3 vettori per avere un sistema di generatori



Dopo vedremo che per $\mathbb{R}^n$ servono n generatori.

Esempio di uno spazio vettoriale per il quale servono <u>infiniti</u> generatori:

$$V = \mathbb{R}[x] \qquad p(x) \in V$$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$ (n <u>non</u> è fisso. Può essere arbitrariamente grande)

$$p_1(x) = x^{700} + 3x^2 \qquad p_1(x) \in V$$

$$p_2(x) = x^{1000000} + 7x^3 + 3 \qquad p_2(x) \in V$$

$$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$$

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = 1 \\ v_2 = x \\ v_3 = x^2 \\ \vdots \\ v_n = x^{n-1} \\ v_{n+1} = x^n \\ \vdots \end{array}\right\} \in V$$

Sistema di generatori

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$$

Def. (vedi Libro, Cap. 1, p. 23) Uno spazio vettoriale V è detto <u>finitamente generato</u> se esiste un insieme finito di generatori di V.

Es.

$V = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ è finitamente generato.

$p(x) \in V$ $\quad p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$

$\Rightarrow \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ è un sistema <u>finito</u> di generatori.

Lemma dello scambio V spazio vettoriale

$v_1, \ldots, v_n \in V$ $\quad \{v_1, \ldots, v_n\}$ insieme di generatori

$w_1, \ldots, w_r \in V$ $\quad \{w_1, \ldots, w_r\}$ libero ($w_1, \ldots, w_r$ linearmente indipendenti)

Allora: $r \leq n$.

Esempio $V = \mathbb{R}^2$ $v_1 = (2,1)$, $v_2 = (0,3)$. Abbiamo visto che $\{v_1, v_2\}$ è un insieme di generatori

$\Rightarrow$ Un insieme di vettori $\{v_1, v_2, v_3\}$ in $\mathbb{R}^2$ è sempre linearmente dipendenti.

Per il lemma dello scambio

Il numero di vettori in un insieme libero $\leq$ Il numero di vettori in un sistema di generatori

Prima di dimostrare il lemma ci serve il seguente risultato:

Esercizio: Siano $w_1, \dots, w_r$ vettori lin. indip. Allora $w_1 \neq \vec{0}, \dots, w_r \neq \vec{0}$.

Dim. Supponiamo che sia $w_i = \vec{0}$ per qualche i.

$$\underbrace{0 \cdot w_1 + \dots + 0 \cdot w_{i-1} + \underbrace{1 \cdot w_i}_{1 \cdot \vec{0}} + 0 \cdot w_{i+1} + \dots + 0 \cdot w_n = \vec{0}}_{}$$

Combinazione lineare di $w_1, \dots, w_r$ uguale a $\vec{0}$ e i coefficienti non sono tutti nulli ($a_i = 1 \neq 0$)

$\Rightarrow w_1, \dots, w_r$ sono lin. dip. ASSURDO.

Es. $\{\vec{0}\}$ è lin. dip. $(1 \cdot \vec{0} = \vec{0})$

$\{\vec{0}, v\}$ è lin. dip. $(1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot v = \vec{0})$

Dim. del lemma dello scambio

$\{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme di generatori

$\{w_1, \dots, w_r\}$ è un insieme libero.

Vogliamo dimostrare che $r \leq n$.

$w_1 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ (perché $\{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme di generatori)

Qualche $\lambda_i \neq 0$ (altrimenti sarebbe $w_1 = \vec{0}$ che non può essere perché i vettori $w_1, \dots, w_r$ sono lin. indip.)

Posso supporre che $i = n$, cioè che sia $\lambda_n \neq 0$

$$\frac{1}{\lambda_n} w_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_n} v_1 + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} v_{n-1} + v_n$$

$$v_n = \underbrace{\frac{1}{\lambda_n}}_{\alpha_1} w_1 - \underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}}_{\alpha_2} v_1 - \dots - \underbrace{\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}}_{\alpha_n} v_{n-1}$$

$v_n = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 v_1 + \dots + \alpha_n v_{n-1}$ = Combinazione lineare di $\{w_1, v_1, \dots, v_{n-1}\}$

Vediamo $\{w_1, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ è ancora un sistema di generatori

Sia $v \in V$

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n \underbrace{v_n}_{v_n = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 v_1 + \ldots + \alpha_n v_{n-1}}$$

Perché $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è un insieme di generatori

$$= \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 v_1 + \ldots + \alpha_n v_{n-1})$$

$$= \underbrace{(\lambda_n \alpha_1) w_1 + (\lambda_1 + \lambda_n \alpha_2) v_1 + \ldots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n \alpha_n) v_{n-1}}_{\text{Combinazione lineare di } \{w_1, v_1, \ldots, v_{n-1}\}}$$

Quindi $\{w_1, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ è un sistema di generatori.

$$\Rightarrow w_2 = \beta_1 w_1 + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$$

Qualche $\lambda_i \neq 0$ (altrimenti sarebbe $w_2 - \beta_1 w_1 = \vec{0}$ che non può essere perché $\{w_1, \ldots, w_r\}$ sono lin. indip.)

Posso supporre che $\lambda_{n-1} \neq 0$

$$\Rightarrow v_{n-1} = \underbrace{\frac{1}{\lambda_{n-1}} w_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_{n-1}} w_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}} v_1 - \ldots - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} v_{n-2}}_{\text{Combinazione lineare di } w_1, w_2, v_1, \ldots, v_{n-2}}$$

Applicando lo stesso ragionamento $\Rightarrow \{w_1, w_2, v_1, \ldots, v_{n-2}\}$ è un sistema di generatori.

In generale si ottiene un sistema di generatori

$$\{w_1, w_2, \dots, w_s, v_1, \dots, v_{n-s}\} \quad \text{per ogni } 1 \leq s \leq r$$

Se fosse $r > n$ si ha:

$\{w_1, \dots, w_n\} \leftarrow$ insieme di generatori.

Allora $w_{n+1} = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n \Rightarrow$ $\{w_1, \dots, w_r\}$ è linearmente dipendenti

ASSURDO.

$\Rightarrow$ Non può essere $r > n$.

$$\boxed{r \leq n}$$

Teorema Tutte le basi di uno spazio vettoriale V (finitamente generato) hanno lo stesso numero di elementi.

Dim. Siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_r\}$ due basi di V

1) $\left.\begin{array}{l} \{v_1, \dots, v_n\} \text{ insieme di generatori} \\ \{w_1, \dots, w_r\} \text{ insieme libero} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{lemma dello scambio}} r \leq n$

2) $\left.\begin{array}{l} \{v_1, \dots, v_n\} \text{ insieme libero} \\ \{w_1, \dots, w_r\} \text{ insieme di generatori} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{lemma dello scambio}} n \leq r$

$$\Rightarrow \boxed{r = n}.$$

$\Rightarrow$ Il numero di elementi di una base dipende solo dello spatio vettoriale (non dalla base scelta)

Def. La dimensione di uno spatio vettoriale è il numero di elementi di una base.

---

① $\mathbb{K}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}\}$

Siano
$$v_1 = (1, 0, \dots, 0)$$
$$v_2 = (0, 1, \dots, 0)$$
$$v_3 = (0, 0, 1, \dots, 0)$$
$$\vdots$$
$$v_i = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow i}{1}, 0, \dots, 0)$$
$$\vdots$$
$$v_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

$v_1, \dots, v_n$ sono generatori? SI

Si. $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$

$(a_1, \dots, a_n) = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

$v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti?

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0} \Rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$$

$$\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_n$ son lin. indip.

$\underbrace{\{v_1, \dots, v_n\}}$ è una base. $\boxed{\dim(\mathbb{K}^n) = n}$

È chiamata Base Canonica

Base canonica di $\mathbb{R}^2$: $\{(1,0), (0,1)\}$

" di $\mathbb{R}^3$: $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

ecc.

Base canonica di $\mathbb{C}^2$ $\{(1,0), (0,1)\}$ ($\mathbb{C}^2$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale)

" di $\mathbb{C}^3$ $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$V = Mat_{k \times n}(\mathbb{K})$ Base canonica di V

contiene le matrici

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \\ \uparrow j \end{array}$$

Base: $\{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{k1}, \dots, E_{kn}\}$

$$\dim(Mat_{k \times n}(\mathbb{K})) = kn$$

Base canonica di $Mat_{2\times3}(\mathbb{R})$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(Mat_{2\times3}(\mathbb{R})) = 6$$

$V = \mathbb{K}[x]_{\leq n}$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n$$

Base canonica di V: $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

$$\dim(\mathbb{K}[x]_{\leq n}) = n+1$$

$V = \mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

Base $\{1, i\}$

<u>Dim.</u>

$z \in \mathbb{C}$ $\quad z = a + ib \quad$ $\left.\begin{matrix} a = Re(z) \\ b = Im(z) \end{matrix}\right\} \in \mathbb{R}$

$$z = \underbrace{a \cdot 1 + b \cdot i} \Rightarrow \{1, i\} \text{ è un insieme di generatori.}$$

Sono lin. indip.?

$\lambda_1, \lambda_2 \in \underline{\underline{\mathbb{R}}} \Rightarrow \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot i = 0$

$$\mathrm{Re}(\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 i) = \lambda_1 = \mathrm{Re}(0) = 0$$

$$\mathrm{Im}(\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 i) = \lambda_2 = \mathrm{Im}(0) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ Sono. lin. indip.

Quindi $\{1, i\}$ è una base di $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

La dimensione di questo spazio è $\underline{\underline{2}}$.

$\mathbb{C}$ come $\mathbb{C}$-spazio vettoriale

Base $= \{1\}$

$z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = \underbrace{z \cdot 1}_{\text{Comb. lineare di } 1} \Rightarrow \{1\}$ è generatore.

$\underline{\lambda \in \mathbb{C}}$, $\lambda \cdot 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \{1\}$ è lin. indip.

$\{1\}$ è una base.

$\mathbb{C}$ come $\mathbb{C}$-spazio vettoriale ha dimensione $\underline{1}$.