ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 18-19 25/10/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Richiamo dalla lezione precedente:

Lemma dello scambio:

Il numero di vettori in un insieme libero $\leq$ Il numero di vettori in un sistema di generatori

Conseguenza:

Tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi

Def. La dimensione di uno spazio vettoriale è il numero di elementi di una base.

Conseguenze del lemma dello scambio:

V uno spazio vettoriale $\dim(V) = n$
(Esiste una base di V con n elementi)

$\{w_1, \dots, w_r\}$ vettori di V

- Se $r > n \Rightarrow$ i vettori sono linearmente dipendenti.
- Se $r < n \Rightarrow$ i vettori non sono un sistema di generatori.

Es. In $\mathbb{R}^2$:

Un insieme di 3 vettori è sempre lin. dip.

Un insieme di 1 vettore non è un generatore.

Altre conseguenze:

Teorema (vedi Libro, Cap. 1, p. 27)

V spazio vettoriale, $\dim(V) = n$

1) Se $v_1, \ldots, v_n$ sono lin. indip. allora essi sono anche un sistema di generatori di V (e quindi sono una base di V).

2) Se $v_1, \ldots, v_n$ sono un sistema di generatori di V allora essi sono anche lin. indip. (e quindi sono una base di V).

Dim.

1) Supp. che $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono lin. indip. e supp. che $\{v_1, \ldots, v_n\}$ non è un sistema di generatori

$\Rightarrow$ Esiste $w \in V$ tale che w non è comb. lineare di $v_1, \ldots, v_n$.

Vediamo che $\{w, v_1, \ldots, v_n\}$ è lin. indip.

$$\alpha w + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}$$

Se $\alpha \neq 0$ allora $w = \underbrace{-\frac{\lambda_1}{\alpha} v_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\alpha} v_n}_{\text{Comb. lineare di } v_1, \dots, v_n}$

$\Rightarrow \underline{\alpha = 0} \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ è libero $\Rightarrow \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$

$\Rightarrow \{w, v_1, \dots, v_n\}$ è lin. indip. <u>ASSURDO</u>

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ è un sistema di generatori e quindi una base di V. ∎

2) Supp. $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono generatori

Supp. $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono lin. dipendenti.

$\Rightarrow$ Uno di essi è comb. lineare dei rimanenti.

$v_i = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ Manca v_i

Vediamo che $\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ è un insieme di generatori.

Sia $w \in V$.

$\{v_1, \dots, v_n\}$ generatori $\Rightarrow$

$$w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_i v_i + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_n v_n$$

$v_i = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ Manca v_i

$$w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_i v_i + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_n v_n$$

$$v_i = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

Manca v_i

$$w = \overbrace{(\lambda_1 + \lambda_i \alpha_1) v_1 + \dots + (\lambda_{i-1} + \lambda_i \alpha_{i-1}) v_{i-1} + (\lambda_{i+1} + \lambda_i \alpha_{i+1}) v_{i+1} + \dots + (\lambda_n + \lambda_i \alpha_n) v_n}^{\text{Combinazione lineare di } \{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}}$$

$\Rightarrow \{\underbrace{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n}_{n-1 \text{ elementi}}\}$ è un insieme di generatori

ASSURDO.

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ sono lin. indip. e quindi sono una base ∎

Teorema V spazio vettoriale $\dim V = n$.

$\{v_1, \dots, v_s\}$ insieme di generatori $(s \geq n)$

Da questo insieme di generatori posso sempre estrarre una base.

Dim.

$v_1, \dots, v_s$ generatori.

Sono anche lin. indip.?

Se SI allora $\{v_1, \dots, v_s\}$ sono già una base $(s=n)$

Se NO i vettori sono dipendenti. Quindi uno di essi è comb. lineare dei rimanenti.

(Possiamo supporre che sia l'ultimo)

$$v_s = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{s-1} v_{s-1}.$$

Lo si cancella dall'elenco.

Vediamo che $\{v_1, \dots, v_{s-1}\}$ sono ancora generatori.

Sia $w \in V$

Perché $\{v_1, \dots, v_s\}$ è un sistema di generatori

$$w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{s-1} v_{s-1} + \lambda_s \underbrace{v_s}_{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{s-1} v_{s-1}}$$

$$= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{s-1} v_{s-1} + \lambda_s (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{s-1} v_{s-1})$$

$$= \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_s \alpha_1) v_1 + \dots + (\lambda_{s-1} + \lambda_s \alpha_{s-1}) v_{s-1}}_{\text{Combinazione lineare di } \{v_1, \dots, v_{s-1}\}}$$

$\Rightarrow$ I vettori $\{v_1, \dots, v_{s-1}\}$ sono ancora un insieme di generatori.

$\{v_1, \dots, v_{s-1}\}$ sono lin. indip.?

Se **SI** allora sono una base (finito)

Se **NO** si ripete il ragionamento

. . . . . .

arrivati ad avere esattamente **n vettori**,

Il procedimento termina a questo punto e si ottiene una base di V ■

Es. $V = \mathbb{R}^3$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle =$ il più piccolo sottosp. di $\mathbb{R}^3$ che contiene v_1, v_2, v_3.

$\dim U = ?$ $\quad$ Base di $U = ?$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ sono generatori di U.

Sono lin. indip.?

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 - 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_2 \\ 4\lambda_2 - 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_2 \\ \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Infinite soluzioni

v_1, v_2, v_3 sono lin. dip.

$\lambda_2 = 1,\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_3 = 0$ è una soluzione

$\Rightarrow 2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad v_2 = -2v_1 - 0 \cdot v_3 \qquad U = \langle v_1, v_3 \rangle$ (tolgo v_2)

$\Rightarrow \quad v_1 = -\frac{1}{2} v_2 - 0 \cdot v_3 \qquad U = \langle v_2, v_3 \rangle$ (tolgo v_1)

Attenzione: Non possiamo togliere v_3 perché v_3 non è combinazione lineare di v_1 e v_2.

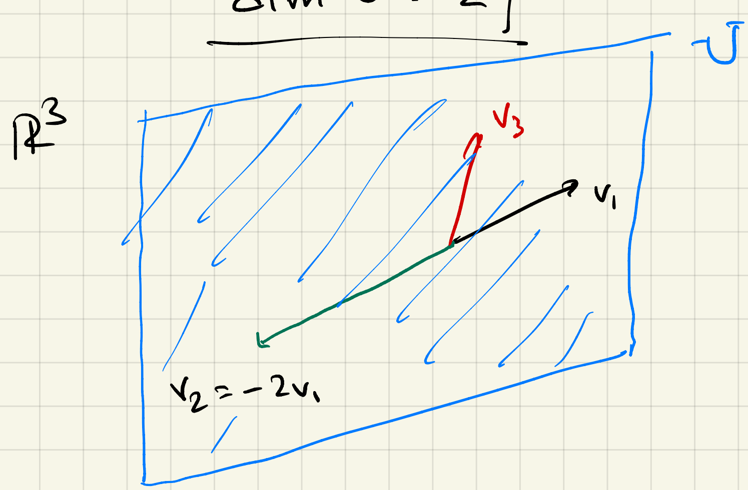
Prendiamo $U = \langle v_1, v_3 \rangle$. Sono lin. indip.?

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_3 = \vec{0} \qquad \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \{v_1, v_3\} \text{ sono lin. indip.}$$

$\Rightarrow \{v_1, v_3\}$ è una base di U.

$$\underline{\dim U = 2}$$



U = piano generato da $\{v_1, v_3\}$ oppure da $\{v_2, v_3\}$

Es. $V = \mathbb{R}^4$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\quad v_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$

$\dim U = ?$ $\quad$ Base di $U = ?$

$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sono generatori di U. Sono lin. indip.?

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = \vec{0}$$

$\Big\{$ 4 equazioni in 4 incognite $\quad$ (risolvere il sistema)

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \lambda_2 = -\frac{2}{3}\lambda_1 \\ \lambda_3 = -\frac{1}{3}\lambda_1 \\ 0 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Infinite soluzioni

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3, v_4$ sono lin. dip.

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = 0$ è una soluzione

$$\Rightarrow \quad 3v_1 - 2v_2 - v_3 + 0 \cdot v_4 = \vec{0}$$

Possiamo scrivere
$$\begin{cases} v_1 = \frac{2}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3 + 0 \cdot v_4 \Rightarrow U = \langle v_2, v_3, v_4 \rangle \\ v_2 = \frac{3}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_3 + 0 \cdot v_4 \Rightarrow U = \langle v_1, v_3, v_4 \rangle \\ v_3 = 3v_1 - 2v_2 + 0 \cdot v_4 \Rightarrow U = \langle v_1, v_2, v_4 \rangle \end{cases}$$

Attenzione: v_4 non è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3. Quindi $U \neq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

Prendiamo $U = \langle v_1, v_2, v_4 \rangle$

v_1, v_2, v_4 sono lin. indip.?

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_4 = \vec{0}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 3\lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \\ (-3-2+1)\lambda_3 = 0 \\ (6-2+4)\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3\lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \\ -4\lambda_3 = 0 \\ 8\lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1, v_2, v_4 \text{ sono lin. indip.}$$

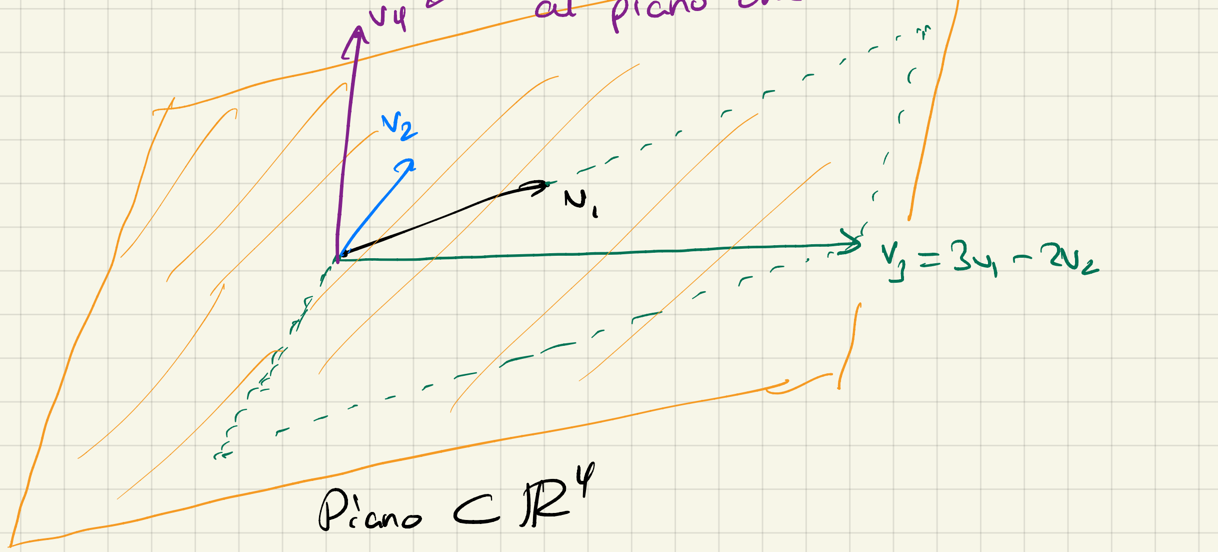
$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_4\}$ è una base di U

$$\Rightarrow \underline{\dim U = 3}.$$

Geometricamente: v_1, v_2, v_3 sono sullo stesso piano

$v_3 = 3v_1 - 2v_2$

non appartiene al piano che contiene v_1, v_2, v_3.



Teorema Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. $\dim V = n$

$\{v_1, \dots, v_r\}$ vettori lin. indip. $(r \leq n)$.

L'insieme $\{v_1, \dots, v_r\}$ può sempre essere **completato** in modo di ottenere una base di V.

Dim. $\{v_1, \dots, v_r\}$ sono generatori?

Se **SI** $\Rightarrow$ Sono già una base di V $(r = n)$

Se **NO** $\Rightarrow$ esiste qualche vettore $v_{r+1} \in V$ che non è combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_r$.

Vediamo che $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}\}$ sono ancora lin. indip.

Sup. $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} v_{r+1} = \vec{0}$

Se $\lambda_{r+1} \neq 0 \Rightarrow v_{r+1} = \underbrace{-\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}} v_1 - \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_{r+1}} v_r}_{\text{Combinazione lineare di } \{v_1, \dots, v_r\}}$ **ASSURDO.**

$\Rightarrow \lambda_{r+1} = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = \vec{0}$

$\{v_1, \dots, v_r\}$ sono lin. indip. $\Rightarrow \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_r = 0$

$\Rightarrow$ Quindi $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}\}$ sono ancora lin. indip.

Sono generatori?

Se SI $\Rightarrow$ sono una base di V $(r+1 = n)$

Se NO $\Rightarrow$ esiste $v_{r+2} \in V$ che non è comb. lineare dei vettori $v_1, \dots, v_{r+1}$

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2}\}$ sono ancora lin. indip. ecc.

Una volta ottenuti n vettori il procedimento termina. $\blacksquare$