ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 20-21, 27/10/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Richiamo dalla lezione precedente:

V spazio vettoriale $\dim(V) = n$.

- $v_1, \dots, v_n$ generatori $\Rightarrow$ sono linearmente indip.
- $v_1, \dots, v_n$ linearmente indip. $\Rightarrow$ sono generatori

$\{v_1, \dots, v_n\}$ è una **base**.

$\{w_1, \dots, w_r\}$ generatori $(r \geq n)$. Posso **estrarre** una base di V

$\{w_1, \dots, w_r\}$ linearmente indip. $(r \leq n)$. Posso **completare** una base di V.

$V = \mathbb{R}^3$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ (v_1, v_2 sono linearm. indip.)

Trovare un vettore v_3 in modo che i vettori $\{v_1, v_2, v_3\}$ formino una base di V.

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \langle v_1, v_2 \rangle \Rightarrow v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = x_1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = x_2 \\ 3\lambda_2 = x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = x_1 \\ \lambda_1 = \lambda_2 - x_2 = \frac{x_3}{3} - x_2 \\ \lambda_2 = \frac{x_3}{3} \end{cases}$$

$$2\left(\frac{x_3}{3} - x_2\right) + \frac{x_3}{3} = x_1$$

$$x_3 - 2x_2 - x_1 = 0$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \langle v_1, v_2 \rangle \iff x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

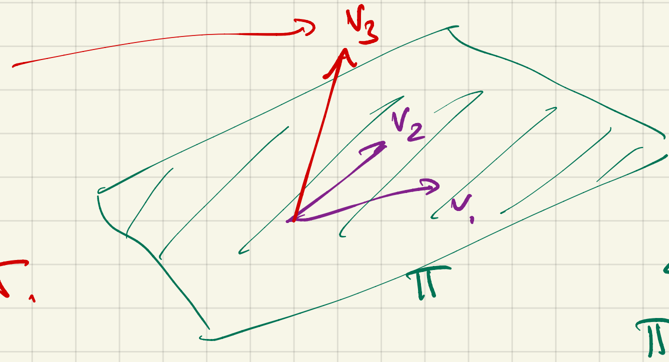
$$\langle v_1, v_2 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

Devo scegliere $v_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$

Ad esempio $v_3 = (1, 0, 0) \notin \langle v_1, v_2 \rangle$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ sono lin. indip. $\Rightarrow$ Sono una base di $\mathbb{R}^3$.

Devo scegliere v_3 che non appartenga al piano π.



Piano che contiene v_1, v_2

$\langle v_1, v_2 \rangle = \pi$

$\pi: x_1 + 2x_2 - x_3 = 0.$

Metodo più semplice per trovare v_3:

Prendo $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Controllo che $\{v_1, v_2, v_3\}$ siano linearmente indip.

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \vec{0}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ I vettori sono lin. indip.

Quindi $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Teorema V spazio vettoriale. $(\dim(V) = n)$

U, W sottosp. vettoriali di V.

$U \cap W$ - sottosp.

$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$

Allora: $\boxed{\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)}$

FORMULA DI GRASSMANN.

Dim. Partiamo da $U \cap W$.

Sia $\{v_1, \dots, v_r\}$ una base di $U \cap W$.

$(\dim(U \cap W) = r)$

$v_1, \dots, v_r$ sono vettori linearmente indipendenti in U. Possiamo completare a una base di U:

$\{v_1, \dots, v_r, \overbrace{u_1, \dots, u_s}^{\in U}\}$ Base di U. $(\dim U = r + s)$

$v_1, \dots, v_r$ sono vettori linearmente indipendenti in W. Possiamo completare a una base di W:

$$\{v_1, \dots, v_r, \overset{\in W}{w_1, \dots, w_t}\} \text{ Base di } W.$$

$(\dim W = r + t)$

Vedremo che

$$\{v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_t\} \text{ è}$$

una base di $U+W$.

Accettiamo che fosse vero:

$$\Rightarrow \dim(U+W) = r + s + t$$

$$= \underbrace{(r+s)}_{\dim U} + \underbrace{(r+t)}_{\dim W} - \underbrace{r}_{\dim(U \cap W)}$$

Dimostrazione che $\{v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_t\}$ è una base di $U+W$.

1) $\{v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_t\}$ è un sistema di generatori.

Sia $v \in U+W \Rightarrow v = u + w \quad u \in U, w \in W$.

$\{v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s\}$ base di $U \Rightarrow u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_s u_s$

$\{v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_t\}$ base di $W \Rightarrow w = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_r v_r + \mu_1 w_1 + \dots + \mu_t w_t$

$$\Rightarrow v = \underbrace{(\alpha_1+\beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_r+\beta_r)v_r + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_s u_s + \mu_1 w_1 + \dots + \mu_t w_t}_{\text{Combinazione lineare di } v_1,\dots,v_r,u_1,\dots,u_s,w_1,\dots,w_t.}$$

2) $\{v_1,\dots,v_r,u_1,\dots,u_s,w_1,\dots,w_t\}$ è libero.

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_s u_s + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_t w_t = \vec{0}$$

$$\underbrace{\underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_s u_s}_{\in U} = -\underbrace{(\beta_1 w_1 + \dots + \beta_t w_t)}_{\in W}}_{\in U \cap W}$$

$$\Rightarrow -(\beta_1 w_1 + \dots + \beta_t w_t) \in U \cap W$$

Perché $\{v_1,\dots,v_r\}$ è una base di $U \cap W$

$$\Rightarrow -\beta_1 w_1 - \dots - \beta_t w_t = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r$$

$$\Rightarrow \mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_t w_t = \vec{0}$$

Ma $\underbrace{\{v_1,\dots,v_r,w_1,\dots,w_t\}}_{\text{è } \underline{\underline{\text{libero}}}}$ è una base di W.

Allora $\mu_1=0,\dots,\mu_r=0$
$\beta_1=0,\dots,\beta_t=0$.

$$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_s u_s = \vec{0}$$

Ma $\underbrace{\{v_1,\dots,v_r,u_1,\dots,u_s\}}_{\text{è libero}}$ è una base di U

Allora $\lambda_1=0,\dots,\lambda_r=0$
$\alpha_1=0,\dots,\alpha_s=0$.

Quindi $v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_t$ sono linearmente indip. e quindi formano una base di $U+W$ ☒

Es.

$$\dim(U \oplus W) = \dim(U+W) \overset{\text{Grassmann}}{=} \dim U + \dim W - \underbrace{\dim(U \cap W)}_{0}$$

$$U \oplus W \Rightarrow \begin{array}{l} U+W \\ U \cap W = \{\vec{0}\} \\ \dim(U \cap W) = 0 \end{array}$$

$$\boxed{\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W}$$

V spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$.

$\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V (fissata)

Ogni $v \in V$ si può scrivere in modo unico come combinazione lineare

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

$$V \ni v \longleftrightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

corrispondenza biunivoca.

Esempio $\quad V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Polinomi in } x \text{ di} \\ \text{grado } \leq 2 \text{ a coeff.} \\ \text{reali} \end{array} \right\}$

$p(x) \in V$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$= a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

Sia $\quad v_1 = 1, \; v_2 = x, \; v_3 = x^2$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di V.

$$p(x) = \underbrace{a_0 v_1 + a_1 v_2 + a_2 v_3}_{\text{Comb. lineare.}}$$

$$V \ni p(x) \longleftrightarrow (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$$

Es. 1.3.3 Bottacin $\quad V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$$p_1(x) = x^2 + x(1-x) + (1-x)^2 = 1 - x + x^2$$

$$p_2(x) = x^2 + (1-x)^2 = 1 - 2x + 2x^2$$

$$p_3(x) = x^2 + 1 + (1-x)^2 = 2 - 2x + 2x^2$$

$$p_4(x) = x(1-x) = x - x^2$$

È possibile estrarre una base di V da $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$?

$p_1(x) = 1 - x + x^2 \longleftrightarrow (1,-1,1) = w_1$

$p_2(x) = 1 - 2x + 2x^2 \longleftrightarrow (1,-2,2) = w_2$

$p_3(x) = 2 - 2x + 2x^2 \longleftrightarrow (2,-2,2) = w_3$

$p_4(x) = x - x^2 \longleftrightarrow (0,1,-1) = w_4$

È possibile estrarre una base di $\underline{\underline{\mathbb{R}^3}}$

da $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$?

Sia $U = \langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$ $\qquad$ $\dim U = ?$

U è sottosp. di $\mathbb{R}^3$ $\qquad$ Base di U.

$w_3 = 2w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_4$ $\qquad$ Possiamo togliere w_3.

$U = \langle w_1, w_2, w_4 \rangle$

w_1, w_2, w_4 sono lin. indip.?

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_4 = \vec{0}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_3 = \lambda_1 + 2\lambda_2 = \lambda_2 \\ \lambda_3 = \lambda_1 + 2\lambda_2 = \lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_3 = \lambda_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$ Infinite soluzioni

$\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_3 = 1$ è una soluzione.

$-w_1 + w_2 + w_4 = \vec{0} \Rightarrow w_1 = w_2 + w_4$

$U = \langle w_2, w_4 \rangle$ (Possiamo togliere w_1)

$\{w_2, w_4\}$ sono lin. indip. $\left(w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \; w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

Non sono paralleli.

$\Rightarrow$ Formano una base di U.

$$\boxed{\dim U = 2}$$

Quindi $W = \langle p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x) \rangle$ è un sottosp. di $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ di dim. 2.

$$\dim W = 2$$

Base di W è $\{p_2(x), p_4(x)\}$

Non è possibile estrarre una base di V dal insieme $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$.

Possiamo <u>completare</u> $\{p_2(x), p_4(x)\}$ a una base di V.

Lavoriamo in $\mathbb{R}^3$.

Troviamo $L \subseteq \mathbb{R}^3$ $\quad L$ sottosp. di $\mathbb{R}^3$

tale che $\underbrace{\mathbb{R}^3}_{\dim 3} = \underbrace{U}_{\dim 2} \oplus \underbrace{L}_{\dim 1}$

$U = \langle w_2, w_4 \rangle$

$L = \langle v \rangle$ deviamo trovare v.

$w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \; w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$v = (1,0,0)$ (a caso)

Controllo che v, w_2, w_4 sono lin. indip.

$$\lambda_1 v + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_4 = \vec{0}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_3 = 2\lambda_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Infinite soluzioni! v, w_2, w_4 sono <u>dip.</u>

$v = (1,0,0)$ <u>non</u> funziona

Provo con $v = (0,1,0)$

Controllo che $\{v, w_2, w_4\}$ sia lin. indip.

$$\lambda_1 v + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_4 = \vec{0}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

v, w_2, w_4 sono lin. indip.

Quindi $L = \langle (0,1,0) \rangle$ funziona.

$$\mathbb{R}^3 = L \oplus U$$

$$\Rightarrow \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{w_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{w_4}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v} \right\}$$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$ Corrisponde a $p(x) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$p(x) = x$

Quindi: $\{\underbrace{1-2x+2x^2}_{p_2(x)}, \underbrace{x-x^2}_{p_4(x)}, \underbrace{x}_{p(x)}\}$

è una base di $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$$V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle x \rangle \oplus \langle p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x) \rangle$$

$$= \langle x \rangle \oplus \langle p_2(x), p_4(x) \rangle$$