ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 22-23, 28/10/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Richiamo dalla lezione precedente:

U, W sottosp. di V

$$\boxed{\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)}$$

FORMULA DI GRASSMANN.

Es. $V = \mathbb{R}^3$

U sottospazio di equazione $x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$

$\dim U = ?$

Base di $U = ?$

Sistema di (una) equazione in 3 incognite:

$$x_1 = \underbrace{2x_2 - 4x_3}$$

2 parametri liberi di variare

Infinite soluzioni. Una per ogni valore di x_2, x_3.

Poniamo $x_2 = \lambda_1, \quad x_3 = \lambda_2$

Corrisponde a $x_2 = 1$, $x_3 = 0$

Corrisponde a $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

$$x_1 = 2\lambda_1 - 4\lambda_2$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 - 4\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow v \in U$ è combinazione lineare dei vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)$$

$$U = \langle u_1, u_2 \rangle$$

Sono linearmente indip.:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \vec{0} \iff \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - 4\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

u_1, u_2 sono indip. e quindi $\{u_1, u_2\}$ è una base di U.

Es. V spazio vettoriale.

$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ base di V.

$V \longleftrightarrow \mathbb{R}^4$

$u_1 \longleftrightarrow (0, 2, 0, -1)$

$u_2 \longleftrightarrow (1, 2, -1, 0)$

$u_3 \longleftrightarrow (1, 0, -1, 1)$

$$u_1 = 2v_2 - v_4$$
$$u_2 = v_1 + 2v_2 - v_3$$
$$u_3 = v_1 - v_3 + v_4$$

$U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$

$\dim U = ?$ Base di $U = ?$

Sappiamo: $\dim V = 4$.

$\dim U \leq 3$

u_1, u_2, u_3 sono lin. indip.? $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \vec{0}$

$$\lambda_1 (2v_2 - v_4) + \lambda_2 (v_1 + 2v_2 - v_3) + \lambda_3 (v_1 - v_3 + v_4) = \vec{0}$$

Comb. lineare di v_1, v_2, v_3, v_4 uguale a $\vec{0}$.

$$\underbrace{(\lambda_2+\lambda_3)}_{0} v_1 + \underbrace{(2\lambda_1+2\lambda_2)}_{0} v_2 + \underbrace{(-\lambda_2-\lambda_3)}_{0} v_3 + \underbrace{(-\lambda_1+\lambda_3)}_{0} v_4 = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \lambda_2+\lambda_3=0 \\ 2\lambda_1+2\lambda_2=0 \\ -\lambda_2-\lambda_3=0 \\ -\lambda_1+\lambda_3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_2=-\lambda_3 \\ \lambda_1=-\lambda_2 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_2=-\lambda_3 \\ \lambda_1=\lambda_3 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Infinite soluzioni, una per ogni λ_3.

$\Rightarrow$ I vettori sono lin. <u>dip.</u>

$\lambda_3=1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_1=1 \Rightarrow u_1-u_2+u_3=\vec{0}$

$u_3=-u_1+u_2$

$U=\langle u_1, u_2\rangle$ $\quad$ u_1, u_2 sono lin. indip.?

$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2=\vec{0}$ $\quad$ u_1 e u_2 non sono paralleli.

$\lambda_1(2v_2-v_4)+\ldots=\vec{0}$ $\quad$ u_1, u_2 sono lin. indip.

$\Rightarrow \{u_1, u_2\}$ formano una base di U.

$\underline{\dim U=2}$.

Siano

$w_1=v_1+v_4$

$w_2=v_2+2v_3$

$w_3=-v_2+v_3+v_4$

$w_4=2v_1+3v_3+3v_4$

Sia $W=\langle w_1, w_2, w_3, w_4\rangle$

$\dim W=?$ base di $W=?$

$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 w_4 = \vec{0}$

$\lambda_1 (v_1 + v_4) + \lambda_2 (\dots) + \dots = \vec{0}$

Si trova un sistema di 4 equazioni lineari per 4 incognite.

Una incognita rimane libera di variare $\Rightarrow$ infinite soluzioni

$\Rightarrow w_1, w_2, w_3, w_4$ sono lin. dip.

Si trova che $w_4 = 2w_1 + w_2 + w_3$

$W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$

$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = \vec{0}$ ... si trova $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$

$\Rightarrow w_1, w_2, w_3$ sono lin. indip.

$\Rightarrow \{w_1, w_2, w_3\}$ è una base di $W \Rightarrow \dim W = 3$.

Trovare dim e basi di $U \cap W$ e $U + W$.

$U = \langle u_1, u_2 \rangle \qquad \dim U = 2$

$W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle \qquad \dim W = 3$

Grassmann: $\underset{\leq 4}{\dim(U+W)} = \underbrace{\dim U}_{=2} + \underbrace{\dim W}_{=3} - \dim(U \cap W)$

$U + W \subseteq V$

$$5 - \dim(U \cap W) \le 4 \iff \underline{\dim(U \cap W) \ge 1}$$

La dimensione di $U \cap W$ è almeno 1.

Sia $v \in U \cap W \Rightarrow v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3$

$$\Rightarrow \alpha_1(\overbrace{2v_2 - v_4}^{u_1}) + \alpha_2(\overbrace{v_1 + 2v_2 - v_3}^{u_2}) = \beta_1(\overbrace{v_1 + v_4}^{w_1}) + \beta_2(\overbrace{v_2 + 2v_3}^{w_2})$$
$$+ \beta_3(\underbrace{-v_2 + v_3 + v_4}_{w_3})$$

$$\underbrace{(\alpha_2 - \beta_1)}_{0} v_1 + \underbrace{(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \beta_2 + \beta_3)}_{0} v_2 + \underbrace{(-\alpha_2 - 2\beta_2 - \beta_3)}_{0} v_3 + \underbrace{(-\alpha_1 - \beta_1 - \beta_3)}_{0} v_4 = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 - \beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \beta_2 + \beta_3 = 0 \\ -\alpha_2 - 2\beta_2 - \beta_3 = 0 \\ -\alpha_1 - \beta_1 - \beta_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_1 = \alpha_2 \\ \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \beta_3 \\ -\alpha_2 - 4\alpha_1 - 4\alpha_2 - 2\beta_3 - \beta_3 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - \beta_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_2 \\ \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \beta_3 \\ -4\alpha_1 - 5\alpha_2 - 3\beta_3 = 0 \\ \alpha_1 = -\alpha_2 - \beta_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4\alpha_2 + 4\beta_3 - 5\alpha_2 - 3\beta_3 = 0 \\ \alpha_1 = -\alpha_2 - \beta_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = \beta_3 \\ \alpha_1 = -2\beta_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1 = \beta_3 \\ \beta_2 = -4\beta_3 + 2\beta_3 + \beta_3 = -\beta_3 \\ \alpha_2 = \beta_3 \\ \alpha_1 = -2\beta_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_1 = \beta_3 \\ \beta_2 = -\beta_3 \\ \alpha_1 = -2\beta_3 \\ \alpha_2 = \beta_3 \end{cases}$$

Infinite soluzioni, un parametro libero di variare.

$$\Rightarrow \dim(U \cap W) = 1$$

Se $\beta_3 = 1 \Rightarrow \begin{array}{ll} \alpha_1 = -2, & \alpha_2 = 1 \\ \beta_1 = 1, & \beta_2 = -1 \end{array}$

$$\Rightarrow v \in U \cap W \qquad v \begin{cases} \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = -2u_1 + u_2 \\ \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3 = w_1 - w_2 + w_3 \end{cases}$$

$$v = -2u_1 + u_2 = -2\overbrace{(2v_2 - v_4)}^{u_1} + \overbrace{(v_1 + 2v_2 - v_3)}^{u_2}$$

$$= v_1 - 2v_2 - v_3 + 2v_4$$

$$v = w_1 - w_2 + w_3 = \overbrace{(v_1 + v_4)}^{w_1} - \overbrace{(v_2 + 2v_3)}^{w_2} + \overbrace{(-v_2 + v_3 + v_4)}^{w_3}$$

$$= v_1 - 2v_2 - v_3 + 2v_4$$

Una base di $U \cap W$ è data dal vettore

$v = v_1 - 2v_2 - v_3 + 2v_4$. Base di $U \cap W$ è $\{v\}$

$$\dim(U + W) = \overset{2}{\dim U} + \overset{3}{\dim W} - \overset{1}{\dim(U \cap W)}$$

$$= 4$$

$$\Rightarrow U + W = V$$

Base di $U+W$ è qualsiasi base di V.

Ad esempio $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Es. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottosp. generato dai vettori $u_1 = (2, 1, 3, -1)$
$u_2 = (1, 2, -1, 4)$

a) Verificare che $u = (5, 1, 10, -7)$ appartiene a U.

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \iff \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 5 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 = 10 \; ✓ \\ -\alpha_1 + 4\alpha_2 = -7 \; ✓ \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} \alpha_2 = -1 \\ \alpha_1 = 3 \end{array}$$

$3(3) - (-1) = 10$

$-3 + 4(-1) = -7$

b) Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottosp. di equazione

$\{ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0$.

$\dim V = ?$

Base di $V = ?$

$$x_4 = \underbrace{-2x_1 + 3x_2}$$

3 parametri liberi di variare x_1, x_2, x_3.

$\Rightarrow \dim V = 3$

$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$; $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$; $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$

Base di V: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

c) Verificare che $U \subset V$ e completare la base $\{u_1, u_2\}$ di U ad una base di V.

$U \subset V \iff u_1$ e u_2 soddisfano $2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0$

$u_1 = (2, 1, 3, -1)$ $\quad 2(2) - 3(1) + (-1) = 4 - 3 - 1 = 0$ ✓

$u_2 = (1, 2, -1, 4)$ $\quad 2(1) - 3(2) + 4 = 2 - 6 + 4 = 0$ ✓

$u_1, u_2 \in V$.

Per completare $\{u_1, u_2\}$ a una base di V.

Per completare $\{u_1, u_2\}$ a una base di V

prendo $u_3 = (0, 0, 1, 0)$

Verifico che u_1, u_2, u_3 sono lin. indip.

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \underline{0}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_2 = -2\lambda_1 \\ \lambda_1 - 4\lambda_1 = 0 \\ \dots \\ \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} -3\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \{u_1, u_2, u_3\} \text{ è una base di } V.$$

d) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottosp. di equazione

$$x_1 - x_3 + 2x_4 = 0$$

Trovare una base di $V \cap W$ e di $V + W$.

$V: 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0$

$W: x_1 - x_3 + 2x_4 = 0$

$$V \cap W : \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = -2x_1 + 3x_2 \\ x_3 = x_1 + 2x_4 = x_1 + 2(-2x_1 + 3x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = -2x_1 + 3x_2 \\ x_3 = \underbrace{-3x_1 + 6x_2}_{} \end{cases}$$

2 parametri liberi di variare x_1, x_2. $\rightsquigarrow \dim(V \cap W) = 2$.

$x_1 = 1, x_2 = 0$; $x_1 = 0, x_2 = 1$

Base di $V \cap W$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

Base di $V + W$? $\dim(V + W) = ?$

Grassmann: $\dim(V+W) = \underbrace{\dim V}_{3} + \underbrace{\dim W}_{3} - \underbrace{\dim(V \cap W)}_{2}$

$$\Downarrow$$

$W: x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = \underbrace{x_3 - 2x_4}_{}$ $\qquad \underline{\dim(V+W) = 4}$

3 parametri liberi di variare x_2, x_3, x_4

$\dim W = 3$

$V+W \subseteq \mathbb{R}^4$ $\quad \dim(V+W) = 4$

Allora $V+W = \mathbb{R}^4$.

Base di $V+W$ è qualunque base di $\mathbb{R}^4$

Ad esempio: $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Base canonica.}} \right\}$

e) È possibile trovare un sottosp. vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che

$$\underbrace{W}_{\text{dim } 3} = \underbrace{U}_{\text{dim } 2} \oplus \underbrace{L}_{\text{dim } 1} \, ?$$

Dal punto di vista della dimensione L potrebbe esistere.

Ma, se $W = U \oplus L$ allora $U \subset W$.

u_1, u_2 soddisfano l'eq. di W?

$u_1 = (2, 1, 3, -1)$ $\quad W: x_1 - x_3 + 2x_4 = 0$

$u_2 = (1, 2, -1, 4)$

$2 - 3 + 2(-1) = -3 \neq 0 \Rightarrow u_1 \notin W$

$1 - (-1) + 2(4) = 10 \neq 0 \Rightarrow u_2 \notin W$

Quindi $U \not\subset W$ e un tale L non esiste.

f) $\dim U \cap W = ?$

$U \cap W$ è un sottosp. di U.

$U \not\subset W$ allora $\dim(U \cap W) < \dim U = 2$

Grassmann:

$$4 = \dim(\mathbb{R}^4) \geq \dim(U+W) = \underbrace{\dim U}_{2} + \underbrace{\dim W}_{3} - \dim(U \cap W)$$

$$4 \geq 5 - \dim(U \cap W)$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq \dim(U \cap W) < 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim(U \cap W) = 1}$$

Base di $U \cap W$ è $\underline{(23, 16, 27, 2)}$.