2021-11-05

venerdì 5 novembre 2021 16:09

EQ. NUM. COMPLESSI

$$z^2 + z\bar{z} - 2 + 4i = 0 \qquad z = a+ib \quad a,b \in \mathbb{R}$$

$$(a+ib)^2 + (a+ib)(a-ib) - 2 + 4i = 0 \qquad \bar{z} = a-ib$$

$$a^2 \cancel{-b^2} + 2abi + a^2 \cancel{+b^2} - 2 + 4i = 0$$

$$(2a^2-2) + i(2ab+4) = 0$$

$$\begin{cases} 2a^2 - 2 = 0 \leftarrow \\ 2ab + 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = 1 \\ * \end{cases} \quad \begin{cases} a = \pm 1 \\ * \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} a = 1 \\ 2b + 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \qquad z_1 = 1 - 2i$$

$$2) \begin{cases} a = -1 \\ -2b + 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \qquad z_2 = -1 + 2i$$

ESERCIZIO 1

$\mathbb{R}^3$

$$v_1 = e_1 + e_3$$
$$v_2 = 2e_1 - e_2 - e_3$$
$$v_3 = e_3$$
$$v_4 = -e_1 + e_2 + e_3$$

Mostra che sono generatori di $\mathbb{R}^3$, ma non una base. Ricava una base.

NON SONO BASE PERCHÉ SONO 4 VETTORI IN UNO SP. VETTORIALE DI DIM 3!!

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w \in \mathbb{R}^3 \quad w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad w \overset{?}{=} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 \quad *$$

LA RISPOSTA È "SÌ" SE RIUSCIAMO A TROVARE UN MODO PER ESPRIMERE λ_i IN FUNZIONE DI x, y, z

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad *$$

$$\begin{cases} x = \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_4 \\ y = -\lambda_2 + \lambda_4 \\ z = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \lambda_1 - 2y + \overline{2\lambda_4 - \lambda_4} \\ \lambda_2 = -y + \lambda_4 \\ z = \lambda_1 + y \cancel{-\lambda_4} + \lambda_3 \cancel{+\lambda_4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = x + 2y - \lambda_4 \\ \star \\ z = x + 2y - \lambda_4 + y + \lambda_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \star\star \\ \star \\ \lambda_3 = z - x - 3y + \lambda_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = x + 2y - \lambda_4 \leftarrow \\ \lambda_2 = -y + \lambda_4 \leftarrow \\ \lambda_3 = z - x - 3y + \lambda_4 \leftarrow \end{cases}$$

SONO GENERATORI

ES

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SE SCELGO $\lambda_4 = 1$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 + 2 \cdot 0 - 1 = 0 \\ \lambda_2 = -0 + 1 = 1 \\ \lambda_3 = 2 - 1 - 3 \cdot 0 + 1 = 2 \end{cases}$$

$\lambda_3 = 2-1-3\cdot 0+1 = 2$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ sono base?

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

è una BASE

$\boxed{\text{ESERCIZIO 2}}$

$\mathbb{R}^3$

$$v = 2e_1 + e_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

Calcoliamo le coordinate di v rispetto alla base $\{u_1, u_2, u_3\}$

$u_1 = e_1 + e_3$ $\qquad u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$u_2 = e_1 + e_2 - e_3$

$u_3 = e_3$

$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 = \lambda_2 \\ 0 = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad (1, 1, 0)$$

ESERCIZIO 3

$\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$p(x) = 2x^2 + 1$

Dare le sue coordinate rispetto alla base

$q_1(x) = x^2 + 1 \qquad q_2(x) = 2x^2 + x - 1 \qquad q_3(x) = 1$

$$p(x) = \lambda_1 q_1(x) + \lambda_2 q_2(x) + \lambda_3 q_3(x)$$

$$2x^2 + 0x + 1 = \lambda_1 x^2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x^2 + \lambda_2 x - \lambda_2 + \lambda_3$$

$$\overset{!}{=} (\lambda_1 + 2\lambda_2)x^2 + \lambda_2 x + (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)$$

$$\begin{cases} 2 = \lambda_1 + \cancel{2\lambda_2} \\ 0 = \lambda_2 \\ 1 = \lambda_1 - \cancel{\lambda_2} + \lambda_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases} \qquad (2; 0; -1)$$

$(2; 0; -1)$ SONO LE COORDIN. DI $p(x)$ RISPETTO $\{q_1(x), q_2(x), q_3(x)\}$

$$2q_1(x) + 0\, q_2(x) - 1\, q_3(x)$$
$$= 2(x^2 + 1) + 0 - (1)$$
$$= 2x^2 + 2 - 1 = 2x^2 + 1 = p(x)$$

ESERCIZIO 4

$\mathbb{R}^4$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$U : \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

- Determinare una base per $W + U$
- Completare tale base a una base di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 = 2x_2 \text{ e } x_3 = x_4 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$W + U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cancel{\lambda_4} = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\cancel{\lambda_2} + \cancel{3\lambda_2} - \cancel{2\lambda_2} = 0 \\ \lambda_3 = -\lambda_2 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

SONO LIN. **DIP.**

NON SCARTO v_4!!

v_1, v_3, v_4 SONO LIN INDIP.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \cancel{\lambda_3} = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

SONO LIN. **INDIP**

NB LA COSA PIÙ AFFIDABILE È CALCOLARE $W \cap U$ E USARE GRASSMANN x DETERMINARE $\dim(W+U)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

PRESO e_2 VERIFICHIAMO SE $\mathcal{B} + e_2$ è BASE $\mathbb{R}^4$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

È BASE

NB SE B È FORMATA DA VETTORI AVENTI TUTTI UNA STESSA ENTRATA CON 0,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

SI SCEGLIE IL VETTORE DELLA BASE CANONICA CON 1 IN <u>QUELLA</u> ENTRATA

COMPLETIAMO CON e_3