ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 28-29, 08/11/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Richiamo: V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.

$f : V \longrightarrow W$ lineare

$\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V $\qquad \dim V = n$

$\underline{w} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W $\qquad \dim W = m$

$$f(v_j) = a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \dots + a_{mj} w_m$$
$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

$$M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f) = A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \boxed{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \boxed{a_{2j}} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \boxed{a_{mj}} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Colonna j

$\longleftarrow$ n colonne

$\longleftarrow$ m righe

Conclusione: Le colonne della matrice $A = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f)$ sono costituite dalle componenti dei vettori $f(v_1), \dots, f(v_n)$ rispetto alla base $\{w_1, \dots, w_m\}$

Esempio: $f: V \to W$ $\quad \dim V = 3$, $\dim W = 2$

$\underline{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ base di V

$\underline{w} = \{w_1, w_2\}$ base di W.

Sappiamo che $\begin{cases} f(v_1) = 4w_1 - w_2 \\ f(v_2) = 0 \\ f(v_3) = -3w_2 \end{cases}$

Scrivere la matrice di f rispetto alle base fissate:

$$A = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times3}(\mathbb{K})$$

V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ $\quad \dim V = n$, $\dim W = m$

$\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V
$\underline{w} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W.

$$f: V \to W$$

$$A = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f) \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Spazio delle funzioni lineari tra V e W

$$L: Hom(V, W) \longrightarrow Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$$

$$L(f) = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f)$$

Lezione precedente:

$$L(f+g) = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f+g)$$
$$= M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f) + M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(g)$$
$$= L(f) + L(g)$$

Sia $\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$

$$L(\lambda f) = ? \qquad M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\lambda f) = ?$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f) \Leftrightarrow f(v_j) = a_{1j} w_1 + \dots + a_{mj} w_m$$

$$(\lambda f)(v_1) = \lambda f(v_1) = \lambda (a_{11} w_1 + \dots + a_{m1} w_m)$$
$$= (\lambda a_{11}) w_1 + \dots + (\lambda a_{m1}) w_m$$

$\vdots$

$$(\lambda f)(v_j) = \lambda f(v_j) = \lambda (a_{1j} w_1 + \dots + a_{mj} w_m)$$
$$= (\lambda a_{1j}) w_1 + \dots + (\lambda a_{mj}) w_m$$

Quindi la colonna j di $M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\lambda f)$ è

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{1j} \\ \vdots \\ \lambda a_{mj} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\lambda f) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1j} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & & \lambda a_{mj} & & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} = \lambda M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f)$$

Allora $L(\lambda f) = \lambda L(f)$

Cioè L è una funzione lineare.

$\ker(L) = ?$ $\qquad L : \mathrm{Hom}(V,W) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$

Supponiamo che $L(f) = \underbrace{\vec{0}}_{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}$.

$\Rightarrow f(v_j) = 0\cdot w_1 + \dots + 0\cdot w_m = \vec{0}_W$

Se $v \in V$, $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)$$
$$= \lambda_1 \underbrace{f(v_1)}_{\vec{0}} + \dots + \lambda_n \underbrace{f(v_n)}_{\vec{0}} = \vec{0}$$

$\Rightarrow f(v) = \vec{0}$ $\qquad f = \vec{0}_{\mathrm{Hom}(V,W)}$

$\ker(L) = \{\vec{0}_{\mathrm{Hom}(V,W)}\} \Rightarrow L$ è <u>iniettiva</u>.

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ allora

se $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ è definita da

$$f(v_j) = a_{1j} w_1 + \dots + a_{mj} w_m \in W$$

$\Rightarrow L(f) = A \Rightarrow L$ è <u>suriettiva</u>

Allora L è biiettiva $\Rightarrow$ L è un <u>isomorfismo</u>.

$\mathrm{Hom}(V,W)$ è isomorfo a $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$
(l'isomorfismo dipende dalle scelte delle basi in V e W)

$$\dim(\mathrm{Hom}(V,W)) = mn$$

Composizione di funzioni lineari

V, W, Z spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.

$$\begin{tikzcd} v \in V \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & W \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

$f(v) \in W$

$$(g \circ f)(v) = g(f(v))$$

Sia $\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V $(\dim V = n)$

$\underline{w} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W $(\dim W = m)$

$\underline{z} = \{z_1, \dots, z_r\}$ base di Z $(\dim Z = r)$

Sia $A = (a_{ij})$ la matrice di f rispetto alle basi $\underline{v}, \underline{w}$.

$A = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)$ matrice $m \times n$

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

Sia $B = (b_{ki})$ la matrice di g rispetto alle basi $\underline{w}, \underline{z}$

$B = M^{\underline{z}}_{\underline{w}}(g)$ matrice $r \times m$

$$g(w_i) = \sum_{k=1}^{r} b_{ki} z_k$$

Sia $C = (c_{kj})$ la matrice di $(g \circ f)$ rispetto alle basi $\underline{v}, \underline{z}$

$C = M^{\underline{z}}_{\underline{v}}(g \circ f)$ matrice $r \times n$

$$(g \circ f)(v_j) = \sum_{k=1}^{r} c_{kj} z_k$$

$$(g \circ f)(v_j) = g(f(v_j))$$

$$= g\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\right)$$

g lineare

$$\overset{*}{=} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, g(w_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{r} b_{ki} z_k\right)$$

$$= \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,r}} b_{ki}\, a_{ij}\, z_k$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki}\, a_{ij} \right) z_k$$

$$= \sum_{k=1}^{r} c_{kj}\, z_k$$

<u>Quindi:</u> La matrice $C = (c_{kj})$ si ottiene dalle matrici A e B tramite la formula:

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki}\, a_{ij}$$

Questo è il <u>prodotto di matrici</u>:

$$\underset{g\circ f}{C} = \underset{g}{B}\;\underset{f}{A}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & W \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Più precisamente si ha:

$$\underbrace{M^{\underline{z}}_{\underline{v}}(g\circ f)}_{r\times n} = \underbrace{M^{\underline{z}}_{\underline{w}}(g)}_{r\times m}\;\underbrace{M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)}_{m\times n}$$

(Il prodotto di matrici corrisponde alla composizione delle funzioni).

PRODOTTO DI MATRICI

$$A = (a_{ij}) \qquad B = (b_{ij})$$

$$C = BA \qquad C = (c_{ij})$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} b_{ik} a_{kj}$$

$$= b_{i1} a_{1j} + b_{i2} a_{2j} + \dots + b_{ir} a_{rj}$$

r = numero di colonne di B
= numero di righe di A

Posso moltiplicare BA solamente se

numero di colonne di B = numero di righe di A.

$$(c_{ij}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{b_{i1} \; b_{i2} \; \cdots \; b_{ir}} \\ \\ \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{rj} \end{matrix}} & \end{pmatrix}}_{A}$$

riga

colonna

Si chiama "prodotto righe per colonne".

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\underbrace{B}_{2\times3}\underbrace{A}_{3\times2}}^{2\times2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot0+0\cdot2 & 2(-1)+1(5)+0(-2) \\ 1\cdot1+(-2)\cdot0+3\cdot2 & 1(-1)+(-2)5+3(-2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -17 \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\overbrace{\underbrace{A}_{3\times2}\underbrace{B}_{2\times3}}^{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 5 & -10 & 15 \\ 2 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

Esempio Prodotto matrice per vettore (colonna)

$$\overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}}_{2\times3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{3\times1}}^{2\times1} = \begin{pmatrix} 5(1)+(1)(-1)+0\cdot2 \\ 2(1)+(-1)(-1)+4\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Esempio Prodotto vettore (riga) per matrice

$$\overbrace{\underbrace{(3, 0, 2, -1)}_{1\times4} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{4\times2}}^{1\times2} = \big(3(1)+0(-1)+2(3)+(-1)\cdot0,\ 3\cdot2+0\cdot0+2\cdot0+(-1)\cdot1\big)$$

$$= (9, 5)$$

<u>Esempio</u>

$$\overbrace{\underbrace{(3,\ 0,\ 2,\ -1)}_{1\times 4}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}}_{4\times 1}}^{1\times 1} = 3\cdot 1+0\cdot 2+2\cdot 3+(-1)\cdot 4$$

$$= \underline{\underline{5}}$$

OSS Per matrici quadrate di ordine n (n righe e n colonne) il prodotto è sempre definito e il risultato è una matrice di ordine n.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2\\-1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 8\\-3 & 9\end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix}4 & 2\\-1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 14\\-1 & 7\end{pmatrix}$$

In generale $AB \neq BA$