ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 30-31, 10/11/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Richiamo dalla lezione precedente:

$$A = (a_{kj}) \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$$

$$B = (b_{ik}) \in Mat_{r \times m}(\mathbb{K})$$

$$C = BA \in Mat_{r \times n}(\mathbb{K})$$

$$C = (c_{ij}) \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}\, a_{kj}$$

$$\begin{tikzcd}
\underset{\dim n}{V} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \underset{\dim m}{W} \arrow[r, "g"] & \underset{\dim r}{Z}
\end{tikzcd}$$

$$\underbrace{C}_{\text{matrice di } g \circ f} = \underbrace{B}_{\text{matrice di } g}\, \underbrace{A}_{\text{matrice di } f}$$

Proprietà del prodotto matriciale

1) $AB \neq BA$ in generale

2) $(AB)C = A(BC)$ sempre vero

3) $(A+B)C = AC + BC$

4) $C(A+B) = CA + CB$

proprietà distributiva

5) Esiste l'elemento neutro per il prodotto?

<u>SI</u>

$\boxed{n \times n}$ $$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A matrice quadrata di ordine n

si ha $A \cdot I = I \cdot A = A$ per ogni $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$

V spazio vettoriale.

$\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V.

$id : V \longrightarrow V$ funzione identità

$v \in V \qquad id(v) = v$

$v \longmapsto v$

$M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(id) = ?$

$id(v_1) = v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$

$id(v_2) = v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$

$\vdots$

$id(v_j) = v_j = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{j-1} + 1 \cdot v_j + 0 \cdot v_{j+1} + \dots + 0 \cdot v_n$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 1^a colonna di $M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(id)$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 2^a colonna di $M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(id)$

$j \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Colonna j della matrice $M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(id)$

$$M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I = \text{matrice identica } n \times n.$$

Esempio

Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = 0$ ma $A \neq 0$

Esempio

$$(A+B)^2 = \cancel{A^2 + 2AB + B^2}$$

$$\overset{\shortparallel}{(A+B)(A+B)} = \underbrace{A^2 + AB + BA + B^2}_{\text{Formula corretta}} \quad \left(\begin{array}{c} AB \neq BA \\ \text{in generale} \end{array} \right)$$

$f : V \longrightarrow W$ funzione lineare

V, W spazi vett. su $\mathbb{K}$.

$\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$\underline{w} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W.

$$v \in V \qquad v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$$

$$V \ni v \longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Coordinate di } v \text{ rispetto alla} \\ \text{base } \underline{v}.}} \in \mathbb{K}^n \quad \left(\begin{array}{c} \text{isomorfismo tra} \\ V \text{ e } \mathbb{K}^n \end{array} \right)$$

Scrivo $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^{\underline{v}}$ per indicare che

queste sono coordinate di v rispetto

alla base $\underline{v}$.

$A = (a_{ij})$ matrice di f (rispetto alle basi fissate)

$$A = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)$$

$$f(v_j) = a_{1j} w_1 + \ldots + a_{mj} w_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

$$f(v) = w \in W$$

$$f(v) = w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m = \sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i \qquad w \longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}^{\underline{w}}} \in \mathbb{K}^m$$

Coordinate di $w = f(v)$ rispetto alla base $\underline{w}$.

$$\begin{tikzcd}
v \in V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[r, bend left=40, leftrightarrow] & W \ni w \arrow[d, "\wr"'] \\
\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^{\underline{v}} \in \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"'] & \mathbb{K}^m \ni \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}^{\underline{w}}}_{m \times 1}
\end{tikzcd}
= \underbrace{A}_{m \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^{\underline{v}}}_{n \times 1}$$

$$w = f(v) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(v_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

$$= \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,m}} a_{ij}\lambda_j w_i = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}\lambda_j) \right)}_{\mu_i} w_i$$

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j \Rightarrow \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

per $i=1,\dots,m$

Più precisamente:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}^{\underline{w}} = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^{\underline{v}}}$$

Esempio Calcolo di $Im(f)$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è un insieme di generatori di $Im(f)$

Quando $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono lin. indip.?

Risposta Se f è iniettiva. $\Leftrightarrow \ker(f) = \{\vec{0}\}$

$$\underbrace{\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)}_{} = \vec{0}$$

$$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in \ker(f)$$

Allora $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$

$$n = \dim V = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

$\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ sono <u>linearmente</u> <u>indipendenti</u>

se $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n \iff \dim \ker(f) = 0$

$\iff \ker(f) = \{\vec{0}\}$.

In generale (se f non è iniettiva)

$\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ sono linearmente dipendenti

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = ?$$

$$f(v_j) = a_{1j} w_1 + \dots + a_{mj} w_m$$

$$A = \begin{pmatrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}} & \end{pmatrix}$$

Colonna j

"Le colonne della matrice A corrispondono alle immagini $f(v_1), \dots, f(v_n)$ dei vettori della base $\underline{v}$"

"Le colonne della matrice A <u>generano</u> l'immagine di f"

$\underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{\text{rango di } f}$ = massimo numero di colonne lin. indip. della matrice A.

<u>Def.</u> Il rango di una matrice A è il massimo numero di colonne lin. indip.

Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ Possiamo definire

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\underline{v} = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_n} \Big\} \longleftarrow n$$

$\longleftarrow$ Base canonica di $\mathbb{K}^n$

$$\underline{w} = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_2}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_m} \Big\}$$

$\longleftarrow$ Base canonica di $\mathbb{K}^m$.

riga j

$$f(v_j) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$\longleftarrow$ Colonna j di A

$$= a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \dots + a_{mj} w_m$$

$$A = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f)$$

A è la matrice di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$.

Esempio $\quad f : V^{=\mathbb{R}^3} \longrightarrow W^{=\mathbb{R}^2}$ di

matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto

alle basi $\{v_1, v_2, v_3\}$ di V

$\{w_1, w_2\}$ di W

Sia $v = 2v_1 - 3v_2 + 4v_3$

Calcolare $f(v)$?

$$f(v) = f(2v_1 - 3v_2 + 4v_3) = 2f(v_1) - 3f(v_2) + 4f(v_3)$$

$f(v_1) = 2w_1 + w_2$ perché $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è la prima colonna di A

$f(v_2) = -w_1 + w_2$ perché $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è la 2^a colonna di A

$f(v_3) = 3w_1 + 2w_2$ perché $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ è la 3^a colonna di A

$$f(v) = 2f(v_1) - 3f(v_2) + 4f(v_3)$$

$$= 2(2w_1 + w_2) - 3(-w_1 + w_2) + 4(3w_1 + 2w_2)$$

$$= 19w_1 + 7w_2$$

$\underline{f(v) = 19w_1 + 7w_2}$

$v = 2v_1 - 3v_2 + 4v_3$ Coordinate di v rispetto alla base $\underline{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ sono $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Coordinate di $f(v)$ rispetto alla base $\underline{w} = \{w_1, w_2\}$ devo calcolare

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{Coord. di } v \text{ risp. a } \underline{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 19 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\text{Coord. di } f(v) \text{ risp. a } \underline{w}}$$

<u>Esempio</u>

$$f : V = \mathbb{R}^3 \longrightarrow W = \mathbb{R}^2$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y + z \\ x + 2z \end{pmatrix}$$

1) Determinare la matrice A di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ — 1ª colonna

$$f(v_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(1) - 2(0) + 0 \\ 1 + 2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ — 2ª colonna

$$f(v_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(v_3) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ — 3ª colonna

$$A = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Sia $v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

base di $\mathbb{R}^3$ (verificare)

$\underline{v}' = \{v_1', v_2', v_3'\}$

Determinare la matrice $\hat{A}$ di f rispetto alla base $\underline{v}' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ di $\mathbb{R}^3$ e rispetto alla base canonica $\underline{w} = \{w_1, w_2\}$ di $\mathbb{R}^2$.

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y + z \\ x + 2z \end{pmatrix}$$

$$f(v_1') = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 w_1 + 5 w_2$$

$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ 1ª colonna di $\hat{A}$

$$f(v_2') = f\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 w_1 + 1 w_2$$

$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2ª colonna di $\hat{A}$

$$f(v_3') = f\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 5 w_1 + 6 w_2$$

$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ 3ª colonna di $\hat{A}$

$$\hat{A} = M^{\underline{w}}_{\underline{v}'}(f) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

3) Sia $w_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $w_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ base di $W = \mathbb{R}^2$.

Determ. la matrice A' di f rispetto alla base $\underline{v}' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ di $V = \mathbb{R}^3$ e rispetto alla base $\underline{w}' = \{w_1', w_2'\}$ di $\mathbb{R}^2$.

$$f(v_1') = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha_1 w_1' + \alpha_2 w_2' = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 5 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 5 \end{cases} \quad \dots \quad \begin{matrix} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -1 \end{matrix}$$

$$f(v_1') = 2 w_1' - w_2'$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ è la 1^a colonna di A'

$$f(v_2') = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = -4 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \alpha_1 = -\frac{3}{5} \\ \alpha_2 = \frac{14}{5} \end{matrix}$$

$$f(v_2') = -\frac{3}{5} w_1 + \frac{14}{5} w_2$$

$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{14}{5} \end{pmatrix}$ è la 2^a colonna di A'

$\vdots$

$$f(v_3') = \frac{11}{5} w_1 - \frac{3}{5} w_2$$

$\begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ 3^a colonna di A'

$$A' = M^{\underline{w}'}_{\underline{v}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{5} & \frac{11}{5} \\ -1 & \frac{14}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$