ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 38-39, 18/11/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Richiamo dalla lezione precedente:

METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS

Operazioni elementari sulle righe:

1) Scambiare due righe fra loro.
2) Moltiplicare una riga per un numero $\neq 0$.
3) Sommare ad una riga una combinazione lineare delle altre righe.

Pivot $\neq 0$

$$A \xrightarrow[\text{elementari sulle righe}]{\text{Operazioni}} A' = \text{matrice in forma a scala} = \begin{pmatrix} * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & * & & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

I. $\text{rango}(A) = \text{rango}(A') =$ Numero di righe non nulle della matrice in forma a scala

II. $A X = \vec{0} \Leftrightarrow A' X = \vec{0}$

OSS: Numero di righe lin. indip. $=$ Numero di colonne lin. indip. $=$ rango

Es. Eliminazione di Gauss per un sistema non omogeneo

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = -4 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice incompleta}} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 0 & -4 \\ 3 & -6 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right)}_{\text{Matrice completa.}}$$

Teo. di Rouché-Capelli $\Rightarrow$ esiste soluzione $\iff$ rango$(A|B)$ = rango(A)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 0 & -4 \\ 3 & -6 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\leftrightarrow\ 3^a \text{ riga}]{1^a \text{ riga}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -6 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{2^a \text{ riga } -3 \times 1^a \text{ riga} \\ 3^a \text{ riga } -2 \times 1^a \text{ riga}}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3^a \text{ riga } -\frac{1}{3}\, 2^a \text{ riga}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Forma a scala di A

Forma a scala di $(A|B)$

Rango di $A = 2$ $\neq$ Rango di $(A|B) = 3$ $\Rightarrow$ Rouché-Capelli $\Rightarrow$ non esiste soluzione.

Il sistema risultante è:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \\ 6x_3 = 3 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

Non esistono soluzioni

Es.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 5 \\ \phantom{2x_1 -{}} 2x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1 \\ x_1 \phantom{{}-2x_2} + 10x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 10 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\Leftrightarrow\ 4^a \text{ riga}]{1^a \text{ riga}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 8 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{3^a \text{ riga} - 1^a \text{ riga} \\ 4^a \text{ riga} - 2 \times 1^a \text{ riga}}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & -1 \\ 0 & -2 & -12 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{3^a \text{ riga} + 2^a \text{ riga} \\ 4^a \text{ riga} + 2^a \text{ riga}}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3^a \text{ riga} \longleftrightarrow 4^a \text{ riga}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Forma a scala di A

Forma a scala di (A|B)

$\text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(A|B) \Rightarrow$ Il sistema ammette soluzioni.

Sistema risultante

$$\begin{cases} x_1 + 10x_3 = 0 \\ 2x_2 + 6x_3 = 1 \\ -6x_3 = 6 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -10x_3 = 10 \\ x_2 = \frac{1}{2}(1 - 6x_3) = \frac{7}{2} \\ x_3 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = \frac{7}{2} \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Trasposizione

(vedi Libro Cap. 2, p. 52)

$$A = (a_{ij}) \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$$ m righe, n colonne

La TRASPOSTA di A è la matrice $A^T = (a_{ji})$ (si indica A^T, A^t, ${}^tA$, ${}^TA$, ...)

è una matrice con n righe e m colonne,

$$A^T \in Mat_{n\times m}(\mathbb{K}).$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Proprietà

1) $(A^T)^T = A$

2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

3) $(AB)^T = B^T A^T$

$$\text{Rango}(A) = \begin{matrix}\text{Numero di} \\ \text{righe indip.} \\ \text{di } A\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Numero di} \\ \text{colonne} \\ \text{indip. di } A^T\end{matrix} = \text{Rango}(A^T)$$

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A^T).$$

$\Rightarrow$ Operazioni elementari sulle righe di A^T non cambiano il rango di A.

Corrispondono a operazioni elementari sulle colonne di A. Quindi: operazioni elementari sulle colonne non cambiano il rango.

OSS. Per calcolare il rango di A si possono effettuare operazioni elementari sia sulle righe, sia sulle colonne di A.

Invece: Per risolvere un sistema di eq. lineari $AX = B$ si possono effettuare unicamente operazioni elementari sulle righe di A.

Es. Siano $v_1 = (1, 2, 3, 0)$, $v_2 = (2, 3, 4, -1)$

$$v_3 = (t, 0, 1, 2) \in \mathbb{R}^4.$$

Per quale valore di t i vettori v_1, v_2, v_3 sono lin. dip.?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ t & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Rango di } A = ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ t & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\longleftrightarrow 1^a \text{ colonna}]{3^a \text{ colonna}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & t & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\longleftrightarrow 3^a \text{ riga}]{1^a \text{ riga}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[3^a \text{ riga } -3 \times 1^a \text{ riga}]{2^a \text{ riga } -4 \times 1^a \text{ riga}}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 2 \\ 0 & 3 & 2-4t & -9 \\ 0 & 2 & 1-3t & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[3^a \text{ riga } -\frac{2}{3}\, 2^a \text{ riga}]{}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 2 \\ 0 & 3 & 2-4t & -9 \\ 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$$

$$* = 1 - 3t - \frac{2}{3}(2-4t)$$

$$= 1 - \frac{4}{3} + \left(-3 + \frac{8}{3}\right)t$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}t$$

$$\Rightarrow \quad \text{rango}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}t \neq 0 \\ 2 & \text{se } -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}t = 0 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}t = 0 \iff \underline{\underline{t = -1}}$$

$$\Rightarrow \text{rango}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } t \neq -1 \\ 2 & \text{se } t = -1 \end{cases}$$

I vettori v_1, v_2, v_3 sono lin. dipendenti $\iff$ $\underline{t=-1}$.

$$A \xrightarrow{\text{Operazioni elementari sulle righe}} A'$$

A: matrice $m \times n$

A': matrice $m \times n$ in forma a scala.

$$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$
$$X \longmapsto f(X) = AX$$

A è la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

Abbiamo detto che: A' è la matrice di f rispetto a una base diversa nel codominio $\mathbb{K}^m$.

Allora (vedi Lezione 33):

$$A' = \underbrace{S}_{m \times m} A P^{-1}$$

P^{-1}: matrice identica $n \times n$ perché la base di $\mathbb{K}^n$ è fissata.

S: $m \times m$ Opportuna matrice di cambiamento di base in $\mathbb{K}^m$.

$$A' = S A$$

S: matrice $m \times m$ invertibile.

Operazioni elementari sulle righe

1) Scambiare due righe fra loro

$$P(i,j) = \begin{array}{c c}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & 0 & \\
& & 0 & \cdots & 1 & & \\
& & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
& & 1 & \cdots & 0 & & \\
& 0 & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix} &
\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{riga } i \\ \\ \leftarrow \text{riga } j \\ \\ \\ \end{array} \\
\uparrow \text{colonna } i \qquad \uparrow \text{colonna } j &
\end{array}$$

Es.

$$P(1,3) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

$P(i,j)A = A'$ è la matrice con le <u>righe</u> i e j scambiate tra loro.

2) Moltiplicare una riga per $\lambda \neq 0$

$$M(i,\lambda) = \begin{array}{c c}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & \\
& \ddots & & & 0 & \\
& & 1 & & & \\
& & & \lambda & & \\
& 0 & & & 1 & \\
& & & & & \ddots \; 1
\end{pmatrix} &
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{riga } i \\ \\ \\ \end{array} \\
\uparrow \text{colonna } i &
\end{array}$$

$M(i,\lambda)A = A'$ è ottenuta moltiplicando per λ la riga i-esima di A.

3) $S(i,j,\alpha) \quad i \neq j$

$$S(i,j,\alpha) = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & \alpha & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \\ \text{colonna } j \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{— riga } i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$S(i,j,\alpha)A = A'$ è ottenuta da A

sommando alla riga i-esima la riga j-esima moltiplicata per α.

<u>Esempio $n=3$</u>

$$S(1,3,\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{riga } 1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$\uparrow$ colonna 3

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S(1,3,\alpha)} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} a+\alpha g & b+\alpha h & c+\alpha i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

1^a riga di A
$+ \alpha \cdot 3^a$ riga di A.

$\Rightarrow$ Tutte le operazioni elementari di A si ottengono moltiplicando A a <u>sinistra</u> per opportune matrici del tipo $P(i,j)$ $M(i,\lambda)$, $S(i,j,\alpha)$ (vedi Libro Cap. 2 pag 82–84)

Le matrici $P(i,j)$, $M(i,\lambda)$, $S(i,j,\alpha)$ sono invertibili

$$P(i,j)\,P(i,j) = I$$

$$M(i,\lambda)\,M(i,\lambda^{-1}) = I \qquad \lambda \neq 0$$

$$S(i,j,\alpha)\,S(i,j,-\alpha) = I$$

matrice identica $m \times m$.

$$A \xrightarrow[\text{sulle righe}]{\text{Operazioni elem.}} A' = \text{matrice in forma a scala.}$$

$$A \longrightarrow B_1 A \longrightarrow B_2 B_1 A \longrightarrow B_3 B_2 B_1 A$$

$$\longrightarrow \dots \longrightarrow \underbrace{(B_n B_{n-1} \cdots B_2 B_1)}_{\substack{B \text{ matrice } m\times m \\ \text{(invertibile)}}} A = \underbrace{A'}_{\substack{\text{matrice} \\ \text{in forma} \\ \text{a scala}}}$$

La matrice B (che si ottiene alla fine) ha la seguente proprietà

$$B A = \underbrace{A'}_{\text{Forma a scala.}}$$

Come calcolare la matrice senza moltiplicare tutte le matrici delle operazioni elementari?

$$\underset{m\times n}{A}\ \Big|\ \overset{\text{matrice identica } m\times m}{I}$$

$$(A \mid I)$$

$$\Big\downarrow \quad \text{Operazioni elementari sulle righe}$$

$$B(A \mid I) = (\underbrace{BA}_{\substack{A' \text{ in} \\ \text{forma a scala}}} \mid \underbrace{B}_{\text{matrice } B \text{ cercata.}})$$

__Esempio__

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 3 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\hspace{2cm}}$$

1^a riga $\longleftrightarrow$ 4^a riga

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\hspace{2cm}}$$

2^a riga $+ 2 \times 1^a$ riga

4^a riga $+ 3 \times 1^a$ riga

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 10 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\hspace{2cm}}$$

3^a riga $- 2^a$ riga

4^a riga $- 2 \times 2^a$ riga

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

A' forma a scala

B matrice cercata.

$\text{rango}(A) = 2$

Si dovrebbe avere $BA = A'$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A'} \checkmark$$