ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 42-43, 24/11/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Richiamo dalla lezione precedente:

Def. A è **invertibile** se esiste B tale che $AB = I$, $BA = I$.

Se A è invertibile, scriviamo $B = A^{-1}$.

A invertibile $\Rightarrow$ A è <u>quadrata</u>

A $n \times n$ invertibile $\Leftrightarrow$ rango$(A) = n$.

Per calcolare A^{-1}:

$$(A \mid I) \xrightarrow[\text{sulle righe}]{\text{Operazioni elementari}} (I \mid B)$$

$B = A^{-1}$ matrice cercata.

OSS: 1) Per matrici quadrate $n \times n$, A, B:
Se $AB = I$ allora anche $BA = I$

e $B = A^{-1}$

2) Questo non è vero per matrici che non sono quadrate. Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq I$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

B è inversa a sinistra di A

B non è inversa a destra di A.

(infatti A non ha inversa a destra).

Per matrici quadrate: Inversa a destra = Inversa a sinistra = <u>Inversa</u>.

<u>DETERMINANTI</u>

A matrice $m \times n$

<u>B sottomatrice di A</u> $\Rightarrow$ B è una matrice che si ottiene da A eliminando alcune righe e/o colonne

B è un <u>minore</u> di A se B è una sottomatrice quadrata di A.

Es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$\text{Minori di } A = \left\{ \begin{matrix} (1), (2), (3), (4), (5), (6) \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix} \right\}$$

Prop. A matrice $m \times n$. Il rango di A è uguale all'ordine massimo di un minore invertibile di A.

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Minori di ordine 1: Se c'è un coefficiente $\neq 0$ allora rango$(A) \geq 1$.

Minori di ordine 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[2^a r. - 4 \times 1^a r.]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Rango $= 2$ ← Invertibile.

$$\Rightarrow \text{rango}(A) \geq 2$$

Non esistono minori di ordine 3 $\Rightarrow$ rango$(A) = 2$.

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 2 = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & * & * & \cdots & * \\ 4 & 5 & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Se $A = (a_{ij})$ è una matrice quadrata $n \times n$.

Scriviamo: $M_{ij} =$ minore di A ottenuto eliminando la riga i-esima e la colonna j-esima di A.

Ordine $n-1$
(M_{ij} è una matrice quadrata $(n-1) \times (n-1)$)

<u>Determinante</u>: serve a determinare se una matrice è invertibile.

$$A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K}), \quad \det(A) \in \mathbb{K}$$

(Vedremo che $\det(A) \neq 0 \iff A$ è invertibile)

- Se A è 1×1 $\quad A = (\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{K}$

  Allora A è invertibile $\iff \lambda \neq 0$.

  $\det(\lambda) = \underline{\lambda}$.

- Se A è 2×2. $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

A invertibile $\iff$ rango$(A) = 2$
$\iff$ le righe di A sono lin. indip.

Supp. $\{(a,b), (c,d)\}$ son lin. dip.

$$\Rightarrow \quad (a,b) = \lambda(c,d) \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a = \lambda c \\ b = \lambda d \end{matrix}$$

$$ad - bc = (\lambda c)d - (\lambda d)c = \lambda(cd - cd) = \underline{\underline{0}}$$

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = ad - bc}$$

<u>Def</u> (Determinante) $\det : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$

Se $n=1$ $\det(\lambda) = \lambda$.

Se $n=2$ $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = ad-bc$

Se $n>2$, scelgo la riga i-esima $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$

$$\underbrace{\det A = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{i+s} a_{is} \det(M_{is})}_{\text{Sviluppo di Laplace rispetto alla } i\text{-esima riga di } A.}$$

<u>Esempio</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \sum_{s=1}^{3} (-1)^{1+s} a_{1s} \det(M_{1s})$$

rispetto alla 1ª riga

$$= (-1)^{1+1} \overset{a_{11}}{1} \det\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}}_{M_{11}} + (-1)^{1+2} \overset{a_{12}}{2} \det\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}}_{M_{12}}$$

$$+ (-1)^{1+3} \overset{a_{13}}{0} \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= (1\cdot 6 - 2\cdot 4) - 2(3\cdot 6 - 2\cdot 6) = -2 - 12 = -14$$

(Quindi A è invertibile)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det A \underset{\substack{\text{Sviluppo} \\ \text{risp. } 2^a \\ \text{riga}}}{=} -3 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= -3(12) + 1(6) - 2(-8)$$

$$= -36 + 6 + 16 = \underline{\underline{-14}}$$

A matrice quadrata $n \times n$.

A è <u>triangolare inferiore</u> se ha tutti zeri sopra la diagonale principale:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \alpha_3 & 0 \cdots & 0 \\ * & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ * & - & - & * & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\det(A) \underset{\substack{\text{Sviluppo} \\ \text{risp. alla } 1^a \text{ riga}}}{=} \alpha_1 \underbrace{\det \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ * & - & * & \alpha_n \end{pmatrix}}_{\text{Triangolare inferiore}} + 0 \cdots + 0.$$

$$\overset{\downarrow}{=} d_1 d_2 \det \begin{pmatrix} d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & d_n \end{pmatrix} + 0 \cdots 0$$

$$= \cdots = d_1 d_2 \cdots d_{n-2} \det \begin{pmatrix} d_{n-1} & 0 \\ * & d_n \end{pmatrix}$$

$$= d_1 d_2 \cdots d_n$$

Quindi: Se A è triangolare inferiore allora

$$\det(A) = \underbrace{d_1 \cdots d_n}$$

Prodotto dei coefficienti sulla diagonale principale.

La matrice A $n \times n$ è <u>triangolare superiore</u> se ha tutti zeri sotto la diagonale principale.

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & * \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 0 + \cdots + 0 + d_n \det \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= d_n d_{n-1} \det \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = d_1 d_2 \cdots d_n$$

Quindi: Se A è triangolare superiore allora

$$\det A = \underbrace{d_1 \cdots d_n}$$

Prodotto dei coeff. sulla diagonale principale.

In questo caso si ha $\det(A) = \det(A^T)$

Questa proprietà è sempre valida

$$\boxed{\det(A) = \det(A^T)}$$

$\Rightarrow$ Tutte le proprietà dei determinanti che valgono per le righe, valgono anche per le colonne.

$\Rightarrow$ Per calcolare il determinante di A si può anche fare uno sviluppo rispetto ad una colonna:

Scelgo la colonna j-esima $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\det A = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+j} a_{sj} \det(M_{sj})}_{\text{Sviluppo di Laplace rispetto alla colonna } j.}$$

La matrice A $n \times n$ è detta diagonale se A è triangolare superiore e triangolare inferiore.

$$\underbrace{A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}}_{\text{matrice diagonale.}} \qquad \det(A) = d_1 d_2 \cdots d_n.$$

Alcune proprietà dei determinanti

1. Siano $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ le righe di A.

$$A = \begin{pmatrix} — A^{(1)} — \\ — A^{(2)} — \\ \vdots \\ — A^{(n)} — \end{pmatrix}$$

Supp. che si abbia $A^{(i)} = \alpha v + \beta w$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $v, w \in \mathbb{K}^n$

$$A = \begin{pmatrix} — A^{(1)} — \\ \vdots \\ — A^{(i)} — \\ \vdots \\ — A^{(n)} — \end{pmatrix} \longleftarrow A^{(i)} = \alpha v + \beta w$$

$$\det(A) \underset{\substack{\text{Sviluppo} \\ \text{riga } i}}{=} \sum_{s=1}^{n} (-1)^{i+s} a_{is} \det(M_{is})$$

$$A^{(i)} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$

$$A^{(i)} = \alpha \underbrace{(v_1, \dots, v_n)}_{v} + \beta \underbrace{(w_1, \dots, w_n)}_{w}$$

$$= (\alpha v_1 + \beta w_1, \dots, \alpha v_n + \beta w_n)$$

$$a_{i1} = \alpha v_1 + \beta w_1, \quad \dots, \quad a_{in} = \alpha v_n + \beta w_n$$

$$a_{is} = \alpha v_s + \beta w_s$$

$$\det(A) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{i+s} (\alpha v_s + \beta w_s) \det(M_{is})$$

$$= \left(\alpha \sum_{s=1}^{n} (-1)^{i+s} v_s \det(M_{is})\right) + \left(\beta \sum_{s=1}^{n} (-1)^{i+s} w_s \det(M_{is})\right)$$

$$= \alpha \det \begin{array}{c} \\ \\ \text{riga } i \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} — A^{(1)} — \\ \vdots \\ — v — \\ \vdots \\ — A^{(n)} — \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} — A^{(1)} — \\ \vdots \\ — w — \\ \vdots \\ — A^{(n)} — \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow \text{riga } i \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{\det \begin{pmatrix} — A^{(1)} — \\ \vdots \\ — \alpha v + \beta w — \\ \vdots \\ — A^{(n)} — \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} — A^{(1)} — \\ \vdots \\ — v — \\ \vdots \\ — A^{(n)} — \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} — A^{(1)} — \\ \vdots \\ — w — \\ \vdots \\ — A^{(n)} — \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow$ Il determinante è una funzione lineare in ciascuna delle sue n righe.

In particolare:

$$\det \begin{pmatrix} — A^{(1)} — \\ \vdots \\ — \lambda A^{(i)} — \\ \vdots \\ — A^{(n)} — \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} — A^{(1)} — \\ \vdots \\ — A^{(i)} — \\ \vdots \\ — A^{(n)} — \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)}$$

Il determinante è anche una funzione lineare in ciascuna delle sue colonne:

$A_{(1)}, \dots, A_{(n)}$ colonne di A $\quad A_{(i)} = \alpha v + \beta w$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} | & & | & & | \\ A_{(1)} & \cdots & \alpha v + \beta w & \cdots & A_{(n)} \\ | & & | & & | \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \det \begin{pmatrix} | & & | & & | \\ A_{(1)} & \cdots & v & \cdots & A_{(n)} \\ | & & | & & | \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} | & & | & & | \\ A_{(1)} & \cdots & w & \cdots & A_{(n)} \\ | & & | & & | \end{pmatrix}$$

In particolare

$$\det \begin{pmatrix} | & & | & & | \\ A_{(1)} & \cdots & \lambda A_{(i)} & \cdots & A_{(n)} \\ | & & | & & | \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} | & & | & & | \\ A_{(1)} & \cdots & A_{(i)} & \cdots & A_{(n)} \\ | & & | & & | \end{pmatrix}$$

Prop. Sia A' la matrice ottenuta da A scambiando due righe fra di loro. Allora

$$\underline{\det(A') = -\det(A)}$$

(lo stesso vale per le colonne)

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \qquad \det \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = cb - ad$$