ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 44-45, 25/11/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Richiamo dalla lezione precedente:

Def (Determinante) $\det : \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$

Se $n=1$ $\quad \det(\lambda) = \lambda$.

Se $n=2$ $\quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

Se $n>2$, scelgo la riga i-esima $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$

$$\det A = \underbrace{\sum_{s=1}^{n} (-1)^{i+s} a_{is} \det(M_{is})}_{\text{Sviluppo di Laplace rispetto alla } i\text{-esima riga di } A}$$

Minore di A ottenuto eliminando la riga i-esima e la colonna s-esima

Proprietà:

- $\det(A) = \det(A^T)$

- $$\det A = \underbrace{\sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+j} a_{sj} \det(M_{sj})}_{\text{Sviluppo di Laplace rispetto alla } j\text{-esima colonna di } A}$$

Minore di A ottenuto eliminando la riga s-esima e la colonna j-esima

- $$\det\begin{pmatrix} — & A^{(1)} & — \\ & \vdots & \\ — & \alpha v + \beta w & — \\ & \vdots & \\ — & A^{(n)} & — \end{pmatrix} = \alpha \det\begin{pmatrix} — & A^{(1)} & — \\ & \vdots & \\ — & v & — \\ & \vdots & \\ — & A^{(n)} & — \end{pmatrix} + \beta \det\begin{pmatrix} — & A^{(1)} & — \\ & \vdots & \\ — & w & — \\ & \vdots & \\ — & A^{(n)} & — \end{pmatrix}$$

riga i

- $$\det\begin{pmatrix} — & A^{(1)} & — \\ & \vdots & \\ — & \lambda A^{(i)} & — \\ & \vdots & \\ — & A^{(n)} & — \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} — & A^{(1)} & — \\ & \vdots & \\ — & A^{(i)} & — \\ & \vdots & \\ — & A^{(n)} & — \end{pmatrix}$$

- $$\det\begin{pmatrix} | & & | & & | \\ A_{(1)} & \cdots & \alpha v + \beta w & \cdots & A_{(n)} \\ | & & | & & | \end{pmatrix} =$$

colonna i

$$= \alpha \det\begin{pmatrix} | & & | & & | \\ A_{(1)} & \cdots & v & \cdots & A_{(n)} \\ | & & | & & | \end{pmatrix} + \beta \det\begin{pmatrix} | & & | & & | \\ A_{(1)} & \cdots & w & \cdots & A_{(n)} \\ | & & | & & | \end{pmatrix}$$

- $$\det\begin{pmatrix} | & & | & & | \\ A_{(1)} & \cdots & \lambda A_{(i)} & \cdots & A_{(n)} \\ | & & | & & | \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} | & & | & & | \\ A_{(1)} & \cdots & A_{(i)} & \cdots & A_{(n)} \\ | & & | & & | \end{pmatrix}$$

<u>Prop.</u> Sia A' la matrice ottenuta da A scambiando due righe fra di loro. Allora

$$\det(A') = -\det(A)$$

(lo stesso vale per le colonne)

Prop. Supp. che A abbia <u>due righe uguali</u>

$\Rightarrow \det(A) = 0.$

Dim. Sia A' la matrice ottenuta da A scambiando le due righe uguali tra loro $\Rightarrow A' = A$

Perché $A' = A$

$$\det(A') = \det(A)$$

Perché ho scambiato due righe tra di loro

$$\det(A') = -\det(A) \quad \Rightarrow \det(A) = -\det(A)$$

$$\Rightarrow \det(A) = 0 \quad \blacksquare$$

(lo stesso vale per le colonne)

Prop. Supp. che A abbia una riga (o colonna) nulla $\Rightarrow \det(A) = 0$

Dim. Se $A^{(i)} = (0, \ldots, 0)$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} — A^{(1)} — \\ \vdots \\ — A^{(i)} — \\ \vdots \\ — A^{(n)} — \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} — A^{(1)} — \\ \vdots \\ (0, \ldots, 0) \\ \vdots \\ — A^{(n)} — \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{riga } i \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \det \begin{pmatrix} — A^{(1)} — \\ \vdots \\ 0 \cdot (1, 1, \ldots, 1) \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{riga } i \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= 0 \cdot \det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ (1, \ldots, 1) \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} = \underline{\underline{0}} \quad \blacksquare$$

Prop. Se ad una riga di A si somma una combinazione lineare di altre righe di A, il determinante <u>non cambia</u> (Lo stesso vale per le colonne).

Dim.

$$A = \begin{pmatrix} — A^{(1)} — \\ \vdots \\ — A^{(i)} — \\ \vdots \\ — A^{(n)} — \end{pmatrix} \qquad A^{(i)} \rightsquigarrow A^{(i)} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \lambda_j A^{(j)}}_{\substack{\text{combinazione} \\ \text{lineare} \\ \text{di altre righe} \\ \text{di } A.}}$$

$$A' = \begin{pmatrix} — A^{(1)} — \\ \vdots \\ — A^{(i)} + \sum_{i \neq j} \lambda_j A^{(j)} — \\ \vdots \\ — A^{(n)} — \end{pmatrix}$$

$$\det(A') = \det \begin{pmatrix} — A^{(1)} — \\ \vdots \\ — A^{(i)} + \sum_{i \neq j} \lambda_j A^{(j)} — \\ \vdots \\ — A^{(n)} — \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} — A^{(1)} — \\ \vdots \\ — A^{(i)} — \\ \vdots \\ — A^{(n)} — \end{pmatrix} + \sum_{i \neq j} \lambda_j \underbrace{\det \begin{pmatrix} — A^{(1)} — \\ \vdots \\ — A^{(j)} — \\ \vdots \\ — A^{(n)} — \end{pmatrix}}_{0}$$

Si trova sulla riga i.

$$= \det \begin{pmatrix} — A^{(1)} — \\ \vdots \\ — A^{(i)} — \\ \vdots \\ — A^{(n)} — \end{pmatrix} = \det(A)$$

0 perché ci sono sempre due righe uguali. La riga $A^{(j)}$ al suo posto e la stessa riga $A^{(j)}$ al posto della riga $A^{(i)}$.

Esercizio $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Calcolo il determinante facendo una riduzione a scala di A.

Scambio 1^a r. $\leftrightarrow$ 2^a r.

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2^a r. -2×1^a r.
3^a r. -3×1^a r.

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

3^a r. $+5\times 2^a$ r.

$$= -(1)(1)(-4) = \underline{\underline{4}}$$

$\det(A) = 4.$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 scambi di righe
$(-1)(-1) = \underline{\underline{1}}.$

Teorema di Binet (vedi Libro, Cap 3, p.107)

A, B matrici $n\times n$

$$\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B)}$$

In particolare: $\boxed{\det(AB) = \det(BA)}$

$\left(\text{In generale} \quad \det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)\right)$

Se A è una matrice invertibile $\Rightarrow$ esiste A^{-1} tale che $AA^{-1} = I$.

$$\det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$$

Teo. di Binet $\longrightarrow$ $\|$

$$\det(A)\det(A^{-1})$$

$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Quindi: A invertibile $\Rightarrow \det(A) \neq 0$.

Formula per l'inversa di una matrice

A matrice $n \times n$ $\quad A = (a_{ij}) \quad A = \begin{pmatrix} & | & \\ — & a_{ij} & — \\ & | & \end{pmatrix} \leftarrow$ riga i

colonna j.

Sia $\underbrace{a^*_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})}$

è il complemento algebrico dell'elemento a_{ij}.

Sviluppo di Laplace:

$$\det(A) = \underbrace{\sum_{s=1}^{n} a_{is}\, a^*_{is}}_{\text{Sviluppo di } \det A \text{ rispetto alla riga } i} = \underbrace{\sum_{s=1}^{n} a_{sj}\, a^*_{sj}}_{\text{Sviluppo di } \det(A) \text{ rispetto alla colonna } j.}$$

Si costruisce la matrice

$$A^* = (a^*_{ij})^T \quad \left(\text{la trasposta della matrice dei complementi algebrici}\right)$$

allora (vedi Libro Cap. 3, pag 116-117)

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*} \qquad \left(\left(\frac{1}{\det A} A^*\right)(A) = I\right)$$

Formula di Interesse teorico

Metodo di eliminazione di Gauss è più veloce per i calcoli.

$\Rightarrow$ Se $\det(A) \neq 0$ si può costruire la matrice $\frac{A^*}{\det(A)} = A^{-1} \Rightarrow A$ è invertibile.

Quindi $\det A \neq 0 \Longleftrightarrow A$ è invertibile

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1^{+} & -1^{-} & 0^{+} \\ 2^{-} & 1^{+} & 1^{-} \\ 3^{+} & 0^{-} & -2^{+} \end{pmatrix}$$

$$a^*_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

$$a^*_{11} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2$$

$$a^*_{12} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = -(-4-3) = 7$$

$$a^*_{13} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -3$$

$$a^*_{21} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -(2) = -2$$

$$a^*_{22} = -2$$

$$a^*_{23} = -3$$

$$a^*_{31} = -1$$

$$a^*_{32} = -1$$

$$a^*_{33} = 3$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ -2 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 7 & -2 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -9$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^* = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 7 & -2 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2/9 & 2/9 & 1/9 \\ -7/9 & 2/9 & 1/9 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Def. A matrice quadrata $n \times n$ è una <u>matrice scalare</u> se $A = aI$ con $a \in \mathbb{K}$.

Se A è una matrice scalare $A = aI$ e B è una qualunque matrice quadrata $n \times n$ allora:

$$AB = (aI)B = a(IB) = aB$$

$$BA = B(aI) = a(BI) = aB$$

$$AB = BA.$$

Es. Sistema di equazioni lineari

$$\Sigma_\lambda : \begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad - x_5 = \lambda \\ 2x_1 + 2\lambda x_2 + (\lambda+1)x_3 + 2x_4 + (\lambda-2)x_5 = 3\lambda \\ -x_1 - \lambda x_2 - x_3 + (\lambda+1)x_4 + 2x_5 = -\lambda \\ \qquad\qquad (\lambda-1)x_3 + 2x_4 + (2\lambda+1)x_5 = 3\lambda \end{cases}$$

Determinare per quali λ il sistema Σ_λ non ha soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \lambda & 1 & 0 & -1 & \lambda \\ 2 & 2\lambda & \lambda+1 & 2 & \lambda-2 & 3\lambda \\ -1 & -\lambda & -1 & \lambda+1 & 2 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 2 & 2\lambda+1 & 3\lambda \end{array}\right) \xrightarrow[3^a \text{ riga} + 1^a \text{ riga}]{} $$

$\underbrace{}_{A}$ $\underbrace{}_{B}$

2^a riga $- 2 \times 1^a$ riga

3^a riga $+ 1^a$ riga

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \lambda & 1 & 0 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 2 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 2 & 2\lambda+1 & 3\lambda \end{array}\right) \xrightarrow[\text{4ª riga} - \text{2ª riga}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \lambda & 1 & 0 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 2 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda+1 & 2\lambda \end{array}\right)$$

Pivot se $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -1$

Se $\lambda \neq 1, -1$ abbiamo rango$(A) = 4$, rango$(A|B) = 4$

Rouché-Capelli: Il sistema ammette soluzioni

Se $\lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{3ª riga} - \text{2ª riga}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Scambio 3ª riga} \leftrightarrow \text{4ª riga}]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Forma a scala di A

Forma a scala di (A|B)

Rango$(A) = 3$

Rango$(A|B) = 4$

Rouché-Capelli: Il sistema non ha soluzioni.

Se $\lambda = -1$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Rango$(A) = 3$ Rango$(A|B) = 4$

Rouché – Capelli: Il sistema non ha soluzioni.

Quindi, il sistema Σ_λ ha soluzioni se e solo se $\lambda \neq 1, -1$.

Es. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ generato dai vettori
$v_1 = (1, 2, 3, 0)$ $v_2 = (2, 3, 4, -1)$

Trovare le equazioni cartesiane di V.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta \\ 2\alpha + 3\beta \\ 3\alpha + 4\beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + 2\beta \\ x_2 = 2\alpha + 3\beta \\ x_3 = 3\alpha + 4\beta \\ x_4 = -\beta \end{cases}$$

Elimino i parametri α, β:

$$\begin{cases} \beta = -x_4 \\ \alpha = x_1 - 2\beta = x_1 + 2x_4 \\ x_2 = 2(x_1 + 2x_4) + 3(-x_4) = 2x_1 + x_4 \end{cases}$$

$$x_3 = 3(x_1 + 2x_4) + 4(-x_4) = 3x_1 + 2x_4$$

$$\begin{cases} \beta = -x_4 \\ \alpha = x_1 + 2x_4 \\ \boxed{\begin{matrix} x_2 = 2x_1 + x_4 \\ x_3 = 3x_1 + 2x_4 \end{matrix}} \end{cases} \qquad V: \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Altro metodo (con operazioni elementari)

Chiedo che abbia rango 2

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 2 & 3 & x_2 \\ 3 & 4 & x_3 \\ 0 & -1 & x_4 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & \end{array}\end{array} \xrightarrow[\substack{3^a \text{ riga } - 3\times 1^a \text{ riga}}]{\substack{2^a \text{ riga } - 2\times 1^a \text{ riga}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & -2 & x_3 - 3x_1 \\ 0 & -1 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{4^a \text{ riga } - 2^a \text{ riga}}]{\substack{3^a \text{ riga } - 2\times 2^a \text{ riga}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - 3x_1 - 2(x_2 - 2x_1) \\ 0 & 0 & x_4 - (x_2 - 2x_1) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x_3 - 3x_1 - 2x_2 + 4x_1 = 0 \\ x_4 - x_2 + 2x_1 = 0 \end{cases} \qquad V: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$