ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 50-51, 02/12/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Richiamo dalla lezione precedente:

A matrice quadrata diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$ Esiste una base costituita da autovettori

A diagonalizzabile:

$$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

invertibile (matrice di cambiamento di base)

le colonne sono gli autovettori

$$A = PDP^{-1}$$

$$D = P^{-1}AP$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

matrice diagonale

autovalori sulla diagonale

- Autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti

  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ autovalori $\lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j$

  $v_1, \dots, v_r$ autovettori

  $\{v_1, \dots, v_r\}$ sono linearmente indipendenti.

- Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ ha n autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ distinti allora A è diagonalizzabile.

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Stabilire se A è diagonalizzabile.

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda^{+} & 0^{-} & 3^{+} \\ -2^{-} & -4-\lambda^{+} & 1^{-} \\ 0^{+} & 0^{-} & 2-\lambda^{+} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{Sviluppo rispetto alla 3ª riga}}{=} (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -2 & -4-\lambda \end{pmatrix} = \underbrace{(2-\lambda)(2-\lambda)(-4-\lambda)}_{\text{Scomposto in fattori}}$$

$$\det(A-\lambda I) = (2-\lambda)^2(-4-\lambda)$$

$$\underbrace{\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2}_{\text{2 è autovalore con molteplicità algebrica 2}} \qquad \lambda_3 = -4$$

Autovettori:

$\lambda_3 = -4$

$$A - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} 2-(-4) & 0 & 3 \\ -2 & -4-(-4) & 1 \\ 0 & 0 & 2-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_3 = 0 \\ 6x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

1 parametro libero di variare x_2.

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'autospazio relativo a $\lambda_3 = -4$ è $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Ha dimensione 1

$\Rightarrow$ Molticiplità geometrica di $\lambda_3 = -4$ $= 1$.

$\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 2}$ |

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 3 \\ -2 & -4-2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 6x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = -3x_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

1 parametro libero di variare

$\Rightarrow$ La dimensione dell'autopazio associato a $\lambda_{1,2} = 2$ è 1

(Moltiplicità geometrica di $\lambda_{1,2} = 2$ $= 1$)

Una base dell'autospazio è $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Autovalori

$\lambda = -4$ — molt. alg. 1, molt. geom 1

$\lambda = 2$ — molt. alg. 2, molt. geom 1

Ci sono solamente due autovettori linearmente indipendenti. Non esiste una base formata da autovettori $\Rightarrow$ La matrice A non è diagonalizzabile.

Teorema Si ha sempre

$$\text{molteplicità geometrica} \leq \text{molteplicità algebrica}$$

(vedi libro, cap 4, p. 147)

Dim.

Sia A matrice $n \times n$.

Sia $\lambda = a$ un autovalore con molteplicità geometrica r $\left(= \begin{array}{l} \text{dim. dell'autospazio} \\ \text{relativo all'autovalore } \lambda = a \end{array} \right)$

Sia $\{v_1, \dots, v_r\}$ una base di questo autospazio (autovettori di A relativi all'autovalore $\lambda = a$)

Completo i vettori $v_1, \dots, v_r$ in modo da ottenere una base $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$.

$$\begin{aligned} Av_1 &= av_1 \\ Av_2 &= av_2 \\ &\ \vdots \\ Av_r &= av_r \end{aligned}$$

Rispetto a questa base si ottiene la matrice

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a \end{matrix} & \begin{matrix} * & \cdots & * \\ * & B & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{matrix} \\ \hline \underbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}_{r \text{ colonne}} & \begin{matrix} \vdots & & \vdots \\ \vdots & C & \vdots \\ * & \cdots & * \end{matrix} \end{array} \right) \begin{array}{l} \} \ r \text{ righe} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

A e A' sono matrici simili.

$\Rightarrow$ Hanno lo stesso polinomio caratteristico.

$$\det(A-\lambda I) = \det(A'-\lambda I)$$

$$A' - \lambda I = \begin{array}{cc} r \times r & r \times (n-r) \\ \left(\begin{array}{cccc|c} a-\lambda & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & a-\lambda & & \vdots & B \\ 0 & 0 & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & a-\lambda & \\ \hline & 0 & & & C-\lambda I \end{array}\right) & \\ (n-r)\times r & (n-r)\times(n-r) \end{array}$$

$\det(A-\lambda I) =$

$$\det(A'-\lambda I) = \underbrace{(a-\lambda)(a-\lambda)\cdots(a-\lambda)}_{r} \det(C-\lambda I)$$

$$= (a-\lambda)^r \underbrace{\det(C-\lambda I)}_{\text{ci potrebbero essere altri fattori } (a-\lambda)^s}$$

$\Rightarrow$ Molt. algebrica di $\lambda = a$ è al meno $\underline{\underline{r}}$.

$\Rightarrow$ $\underset{\overset{\parallel}{r}}{\text{Molt geom.}} \leq$ Molt. algebrica

Teorema (Criterio per stabilire se una matrice è diagonalizzabile) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$

$A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile se e solo se

1) il polinomio caratteristico di A ammette tutte le radici in $\mathbb{K}$ (tutti gli autovalori appartengono a $\mathbb{K}$)

2) La molteplicità geometrica e algebrica coincidono per ogni autovalore.

OSS: Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ la prima condizione è sempre soddisfatta per il Teorema Fondamentale dell'algebra.

Dim.

Supp. A diagonalizzabile. Allora A è simile a una matrice diagonale $D = Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_r \ddots \lambda_r \end{pmatrix} \begin{matrix} \}m_1 \\ \}m_2 \\ \vdots \\ \}m_r \end{matrix}$$

A e D simili $\Rightarrow$

$$\det(A - \lambda I) = \det(D - \lambda I)$$

$$\stackrel{!}{=} \det \begin{pmatrix} \lambda_1-\lambda & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1-\lambda & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_r-\lambda & \\ 0 & & & & & \ddots \quad \lambda_r-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1-\lambda)^{m_1}(\lambda_2-\lambda)^{m_2}\cdots(\lambda_r-\lambda)^{m_r}$$

$$\boxed{m_1+m_2+\ldots+m_r=n}$$

$\Rightarrow$ Tutte le radici del polinomio caratteristico di A $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ appartengono a $\mathbb{K}$.

Siano: V_{λ_1} autospazio relativo a λ_1

$\vdots$

V_{λ_r} autospatio relativo a λ_r

A diag. $\Rightarrow$ esiste una base costituita da autovettori.

molt. geometriche

$$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \ldots + \dim V_{\lambda_r} = n$$

$$\text{molt. geom.} \leq \text{molt. alg.} \longrightarrow \quad \begin{matrix} \wedge\!\!\shortparallel & & \wedge\!\!\shortparallel & & & \wedge\!\!\shortparallel \\ m_1 & + & m_2 & + & \ldots + & m_r & = n \end{matrix}$$

molt. algebriche

Quindi: $\dim V_{\lambda_1} = m_1$

$\dim V_{\lambda_2} = m_2$

$\vdots$

$\dim V_{\lambda_r} = m_r$

Molt. geom. di ogni autovalore è uguale alla sua molt. algebrica.

$\Leftarrow$) Supp. che

$$\det(A-\lambda I) = (-1)^n \underbrace{(\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda-\lambda_r)^{m_r}}_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K} \\ \text{(tutte le radici del polinomio caratteristico appartengono a } \mathbb{K})}}$$

Ipotesi: $\left.\begin{array}{l} \dim V_{\lambda_1} = m_1 \\ \vdots \\ \dim V_{\lambda_r} = m_r \end{array}\right\}$ Molt. geom. $=$ molt. alg.

$m_1 + \dots + m_r = n$

V_{λ_1} avrà una base $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots, v_{m_1}^{(1)}$

V_{λ_2} avrà una base $v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \dots, v_{m_2}^{(2)}$

$\vdots$

V_{λ_r} avrà una base $v_1^{(r)}, v_2^{(r)}, \dots, v_{m_r}^{(r)}$

Prendiamo tutti gli autovettori trovati:

$$\underbrace{\underbrace{v_1^{(1)}, \dots, v_{m_1}^{(1)}}_{\text{lin. indip.}}, \underbrace{v_1^{(2)}, \dots, v_{m_2}^{(2)}}_{\text{lin. indip.}}, \dots, \underbrace{v_1^{(r)}, \dots, v_{m_r}^{(r)}}_{\text{lin. indip.}}}_{\text{lin. indip. perché sono autovettori relativi a autovalori diversi.}}$$

Il numero di vettori è

$m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$

$\Rightarrow$ Si è trovata una base formata da autovettori, quindi A è diagonalizzabile. $\blacksquare$

A matrice quadrata

$A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$

$\lambda = 0$ è autovalore di $A \iff$ esiste $v \neq 0$ tale che

$Av = 0 \cdot v = \vec{0}$

$\Updownarrow$

$v \in \ker(f) \qquad f(X) = AX$

$\Updownarrow$

f non è iniettiva

$\Updownarrow$

f non è biiettiva $\iff$ f non è invertibile

$\Updownarrow$

A non è invertibile

$\Updownarrow$

$\lambda = 0$ è autovalore di A

Modo alternativo per arrivare alla stessa conclusione:

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$\lambda = 0$ autovalore $\iff p(0) = 0$

$\Updownarrow$

A non è invertibile $\iff \det(A) = 0 \iff \det(A - 0 \cdot I) = 0$

Quindi: A è invertibile se e solo se $\lambda = 0$ non è un autovalore di A.

Se A non è invertibile allora $\lambda = 0$ è un autovalore di A

$V_0 =$ autospazio relativo a $\lambda=0$ $= \ker(f)$ $\quad f(X) = AX$

Traccia di una matrice Quadrata

$$A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{Traccia}(A) = tr(A) = \underbrace{a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}}_{\text{Somma degli elementi sulla diagonale principale.}} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Proprietà

$A, B \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$ allora $tr(AB) = tr(BA)$

Dim.
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad (AB)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$
$$= \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

$$(BA)_{kj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ij} \qquad (BA)_{kk} = \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik}$$

$$\operatorname{tr}(BA) = \sum_{k=1}^{n} (BA)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik}$$
$$= \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \quad \blacksquare$$

Prop. Se $A, B \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$ sono simili allora $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$

Dim

A e B simili $\Rightarrow$ esiste P invertibile tale che $A = P^{-1} B P$

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(P^{-1}BP)$$
$$= \operatorname{tr}(P^{-1}(BP))$$
$$= \operatorname{tr}((BP)P^{-1})$$
$$= \operatorname{tr}(BPP^{-1})$$
$$= \operatorname{tr}(BI) = \operatorname{tr}(B)$$

Quindi $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$

A matrice $n \times n$ diagonalizzabile

allora A è simile a una matrice diagonale

autovalori di A.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(D) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

$$\det(A) = \det(D) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$