ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 54-55, 09/12/2021

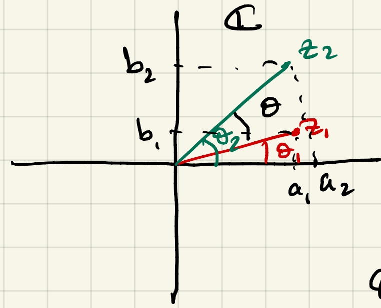
Prof. Luis García-Naranjo

PRODOTTO SCALARE

(Libro Cap. 5)

Cerchiamo nozioni di angolo e lunghezza in uno spazio vettoriale.

Es. $\mathbb{R}^2$ interpretato come piano di Gauss



Rap. cartesiana

$z_1 = (a_1, b_1) \quad z_1 = a_1 + i b_1$

$z_2 = (a_2, b_2) \quad z_2 = a_2 + i b_2$

$\theta = ?$

$$z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$$

$$z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$$

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta} = e^{i\theta_2} \qquad (\theta_2 = \theta_1 + \underline{\theta})$$

$$e^{i\theta_1} = \frac{z_1}{|z_1|}, \qquad e^{i\theta_2} = \frac{z_2}{|z_2|}$$

$$e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta_2}}{e^{i\theta_1}} = \frac{|z_1|}{z_1} \frac{z_2}{|z_2|}$$

$$\frac{1}{z_1} = (z_1)^{-1} = \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}$$

$$e^{i\theta} = \frac{|z_1|\,\overline{z_1}}{|z_1|^2} \frac{z_2}{|z_2|}$$

$$\boxed{e^{i\theta} = \frac{\overline{z_1}\, z_2}{|z_1|\,|z_2|}}$$

$$e^{i\theta} = \underbrace{\cos\theta}_{Re(e^{i\theta})} + i\,\underbrace{\sin\theta}_{Im(e^{i\theta})}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = Re(e^{i\theta}) = Re\left(\frac{\bar{z}_1 z_2}{|z_1||z_2|}\right)$$

$$= \frac{1}{|z_1||z_2|} Re(\bar{z}_1 z_2)$$

$z_1 = a_1 + i b_1$

$z_2 = a_2 + i b_2$

$$\Rightarrow Re(\bar{z}_1 z_2) = Re\left(\overline{(a_1+ib_1)}(a_2+ib_2)\right)$$

$$= Re\left((a_1 - ib_1)(a_2+ib_2)\right)$$

$$= Re\left(a_1a_2 + b_1b_2 + i(a_1b_2 - b_1a_2)\right)$$

$$= a_1a_2 + b_1b_2$$

Quindi:

$$\boxed{\underbrace{a_1a_2 + b_1b_2}_{\text{Somma dei prodotti delle componenti}} = |z_1||z_2|\cos\theta}$$

Def. Prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$ (Non vale per $\mathbb{C}^n$)

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\boxed{\underset{\text{vettore}}{v} \cdot \underset{\text{vettore}}{w} = \underbrace{v_1w_1 + \ldots + v_nw_n}_{\text{scalare}}}$$

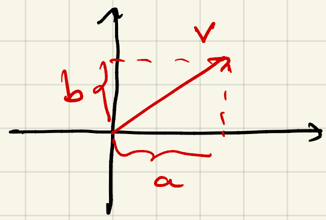
OSS. $v \cdot w = v^T w = \underset{1\times n}{(v_1, \ldots, v_n)} \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}} \in \mathbb{R}$

La <u>norma</u> di $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ è definita

da $\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$

Es.

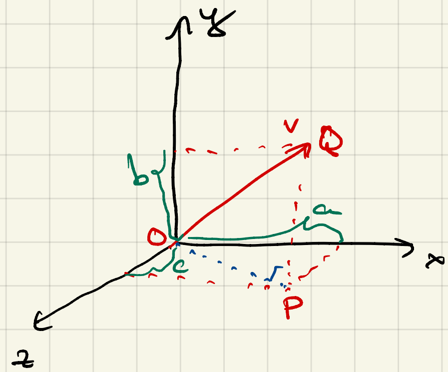
$V = \mathbb{R}^2 \quad v = (a, b)$



$\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (T. di Pitagora).

Es

$V = \mathbb{R}^3 \quad v = (a, b, c)$



T. di Pitagora:

$$\|v\|^2 = \|OQ\|^2 = \underbrace{\|OP\|^2}_{a^2 + c^2} + \underbrace{\|PQ\|^2}_{b^2} = a^2 + b^2 + c^2$$

$\Rightarrow \underline{\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ (La definizione è consistente con il teo. di Pitagora)

Proprietà del prodotto scalare

1) Simmetrico

$$\forall u, w \in \mathbb{R}^n \qquad u \cdot w = w \cdot u$$

2) Bilinearità:

$$(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$$
$$u \cdot (v+w) = u \cdot v + u \cdot w$$
$$(\lambda u) \cdot w = \lambda (u \cdot w)$$
$$u \cdot (\lambda w) = \lambda (u \cdot w)$$

3) Definitezza positiva

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \qquad v \cdot v \geq 0 \quad e \quad v \cdot v = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}.$$

Proprietà della norma

1) $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$.

2) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall v \in \mathbb{R}^n$

3) $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$ si ha $|v \cdot w| \leq \|v\| \|w\|$
(disiguaglianza di Cauchy-Schwarz)

Dim

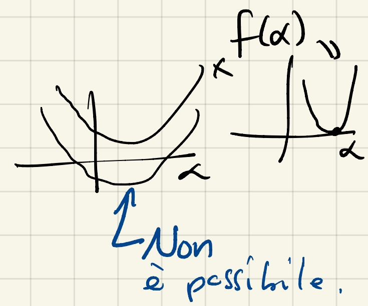
Se $v = \vec{0}$ oppure $w = \vec{0}$ allora $0 \leq 0$ OK

Supp. $v \neq \vec{0}$, $w \neq \vec{0}$. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \|v+\alpha w\|^2 = (v+\alpha w)\cdot(v+\alpha w)$$

$$= \|v\|^2 + \alpha(v\cdot w) + \alpha(w\cdot v) + \alpha^2\|w\|^2$$

$$= \underbrace{\|v\|^2}_{c} + \alpha\,\underbrace{2(v\cdot w)}_{b} + \alpha^2\underbrace{\|w\|^2}_{a}$$



$$= a\alpha^2 + \alpha b + c = f(\alpha)$$

$$\underbrace{\Delta}_{\text{discriminante}} = b^2 - 4ac \leq 0$$

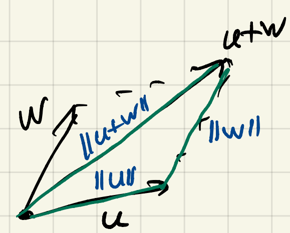
$$\Delta = (2(v\cdot w))^2 - 4\|w\|^2\|v\|^2 \leq 0$$

$$4(v\cdot w)^2 \leq 4\|v\|^2\|w\|^2$$

$$\Rightarrow \underline{|v\cdot w| \leq \|v\|\|w\|} \quad \blacksquare$$

4) Disuguaglianza triangolare

$$\|u+w\| \leq \|u\| + \|w\|$$



Dim.

$$\|u+w\|^2 = (u+w)\cdot(u+w) = \|u\|^2 + u\cdot w + w\cdot u + \|w\|^2$$

$$= \|u\|^2 + 2(u\cdot w) + \|w\|^2$$

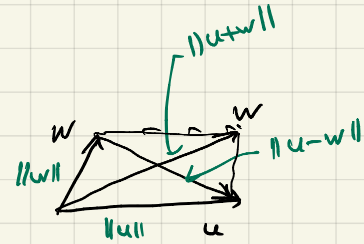
$$\leq \|u\|^2 + 2|u\cdot w| + \|w\|^2$$

Cauchy Schwarz

$$\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|u\| + \|w\|)^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\|u+w\| \leq \|u\| + \|w\|} \quad \blacksquare$$

5. Regola del parallelogramma.



$$\|u+w\|^2 + \|u-w\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|w\|^2\right)$$

$$(u-w)+w = u$$

Dim.

$$\|u+w\|^2 = (u+w)\cdot(u+w) = \|u\|^2 + 2u\cdot w + \|w\|^2$$

$$\|u-w\|^2 = (u-w)\cdot(u-w) = \|u\|^2 - 2u\cdot w + \|w\|^2$$

$$\Rightarrow \|u+w\|^2 + \|u-w\|^2 = 2\|u\|^2 + \cancel{2u\cdot w} - \cancel{2u\cdot w} + 2\|w\|^2$$

$$= 2\left(\|u\|^2 + \|w\|^2\right) \quad \blacksquare$$

Disuguaglianza di Cauchy – Schwarz:

$u, w \neq \vec{0}$

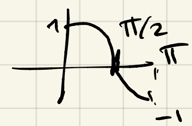
$$|u\cdot w| \leq \|u\|\|w\|$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{|u\cdot w|}{\|u\|\|w\|} \leq 1$$

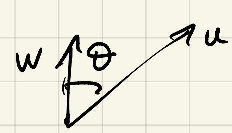
$$\Updownarrow$$

$$-1 \leq \frac{u\cdot w}{\|u\|\|w\|} \leq 1$$



Def.

$$\cos\left(\widehat{uw}\right) = \frac{u\cdot w}{\|u\|\|w\|}$$



OSS: $\cos(\widehat{uw}) = \cos(\widehat{wu})$

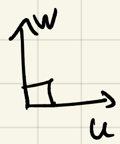
$$0 \leq \widehat{uw} \leq \pi$$

0° $\quad 180^\circ$

$$\cos(\widehat{uw}) = 0 \iff u \cdot w = 0$$

$\frac{\pi}{2} = 90°$

Def. u, w sono ortogonali se $u \cdot w = \underline{\underline{0}}$.



Il prodotto scalare ci permette di parlare di
- lunghezza di vettori
- angoli tra vettori

$\mathbb{R}^n$ dotato dal prodotto scalare standard è un esempio di spazio vettoriale <u>EUCLIDEO</u>.

(Si può generalizzare la nozione di prodotto scalare e spazi vettoriali euclidei)

<u>Def.</u> Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

Una <u>forma bilineare simmetrica</u> è una funzione

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che

i) $g(u, w) = g(w, u) \quad \forall u, w \in V$

$$2)\quad \left.\begin{aligned} g(u+v,w) &= g(u,w)+g(v,w)\\ g(u,v+w) &= g(u,v)+g(u,w)\\ g(\lambda u,v) &= \lambda g(u,v)\\ g(u,\lambda v) &= \lambda g(u,v)\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&\forall u,v,\\ &w\in V\\ &\lambda\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

La forma bilineare simmetrica g è detta <u>positiva definita</u> se

$$g(v,v)\geq 0 \quad \forall v\in V$$
$$\text{e}\quad g(v,v)=0 \iff v=\vec{0}.$$

Uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ dotato di una forma bilineare positiva definita g si chiama <u>Spazio vettoriale euclideo</u>.

<u>Norma</u>: $\quad \|v\| = \sqrt{g(v,v)}$

Noi lavoreremo sempre con

$$V=\mathbb{R}^n$$
$$g(u,v) = u\cdot v = u_1v_1+\dots+u_nv_n$$
$$\|u\| = \sqrt{u\cdot u} = \sqrt{u_1^2+\dots+u_n^2}$$

ma tutto quanto diremo è valido per uno spazio vettoriale Euclideo generale.

u e v sono <u>ortogonali</u> $\Leftrightarrow u \cdot v = 0$.

Scriviamo $u \perp v$.

<u>Def.</u> $v \in \mathbb{R}^n$ è <u>normalizzato</u> se $\|v\| = 1$.

(<u>versore</u>)

Se $v \neq \vec{0}$ allora $\hat{v} = \dfrac{v}{\|v\|}$ è normalizzato.

$$\hat{v} = \frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{1}{\|v\|}\right) v$$

$$\|\hat{v}\| = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \left| \frac{1}{\|v\|} \right| \|v\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1.$$

<u>$\hat{v}$ è un versore.</u>

<u>Def.</u> Siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ sottoinsiemi

Diciamo che $S_1 \perp S_2$ (S_1 è ortogonale a S_2)

$\Longleftrightarrow$ $v_1 \perp v_2$ $\forall v_1 \in S_1$ $\forall v_2 \in S_2$

$\Longleftrightarrow$ $v_1 \in S_1$, $v_2 \in S_2$ allora $v_1 \cdot v_2 = 0$.

<u>Def.</u> Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio.

<u>L'ortogonale di U</u> è definito da

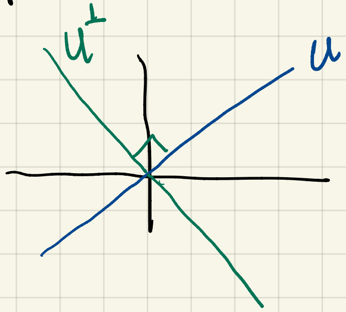
$$U^\perp = \{ v \in V \mid \underbrace{v \cdot u = 0}_{} \ \forall u \in U \}$$

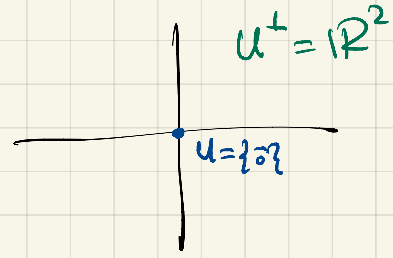
↳ v deve essere ortogonale a tutti i vettori di $\mathcal{U}$.

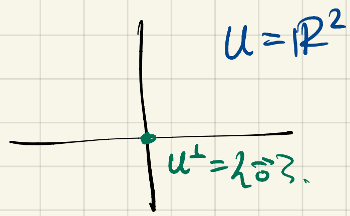
Prop. $\mathcal{U}^\perp$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Esempi

$\mathbb{R}^2$







$\mathbb{R}^3$