ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 56-57, 13/12/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Richiamo dalla lezione precedente:

Def. Prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$ (Non vale per $\mathbb{C}^n$)

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\underset{\text{vettore}}{v} \cdot \underset{\text{vettore}}{w} = \underbrace{v_1 w_1 + \dots + v_n w_n}_{\text{scalare}}}$$

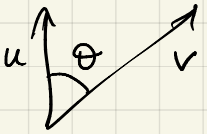
OSS. $v \cdot w = v^T w = \underset{1 \times n}{(v_1, \dots, v_n)} \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}} \in \mathbb{R}$

Def. Norma di $v \in \mathbb{R}^n$

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz: $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$

Angolo tra vettori



$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$$

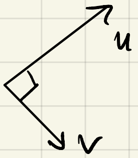
$\mathbb{R}^n$ con prodotto scalare è uno spazio vettoriale EUCLIDEO
(possiamo misurare lunghezze e angoli)

$v \in \mathbb{R}^n$ è **normalizzato** se $\|u\| = 1$ (versore)

$v \neq \vec{0} \Rightarrow \hat{v} = \frac{v}{\|v\|}$ è normalizzato

$u, v \in \mathbb{R}^n$ sono **ortogonali** (perpendicolari) $\Longleftrightarrow$ $u \cdot v = 0$

($u \perp v$)



$U \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio.

L'ortogonale di U

$$U^\perp = \{ v \in V \mid \underbrace{v \cdot u = 0 \quad \forall u \in U}_{\text{v deve essere ortogonale a tutti i vettori di } U.} \}$$

oppure

U ortogonale

U perpendicolare

Prop. $U^\perp$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Dim

Siano $v_1, v_2 \in U^\perp$, $u \in U$

$$\begin{cases} v_1 \cdot u = 0 \\ v_2 \cdot u = 0 \end{cases}$$

Allora $(v_1 + v_2) \cdot u = v_1 \cdot u + v_2 \cdot u = 0 + 0 = 0 \Rightarrow v_1 + v_2 \in U^\perp$

Sia $v \in U^\perp$, $u \in U \Rightarrow v \cdot u = 0$

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad (\lambda v) \cdot u = \lambda (v \cdot u) = \lambda (0) = 0$

$$\Rightarrow \lambda v \in U^\perp$$

$\Rightarrow U^\perp$ è un sottospazio vettoriale ∎

Se $\{u_1, \dots, u_r\}$ sono una base di U

e $v \in \mathbb{R}^n$ $v \in U^\perp$ deve essere

$$u_1 \cdot v = 0, \quad u_2 \cdot v = 0, \dots, \quad u_r \cdot v = 0$$

Se v soddisfa

$$\underline{v \cdot u_1} = 0, \quad \underline{v \cdot u_2} = 0, \dots, \quad v \cdot \underline{u_n} = 0 \quad \text{e} \quad u \in U$$

Quindi $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r v_r$

$$\Rightarrow v \cdot u = v \cdot (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r)$$
$$= \lambda_1 \underbrace{(v \cdot u_1)}_{0} + \dots + \lambda_r \underbrace{(v \cdot u_r)}_{0} = 0$$

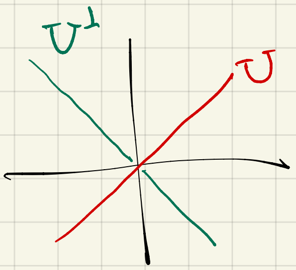
Per tanto $v \in U^\perp$

Quindi

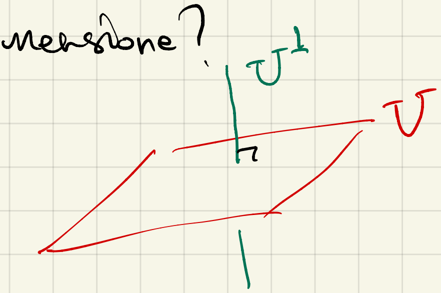
$v \in U^\perp \Leftrightarrow v$ è perpendicolare ai vettori di una base di U.

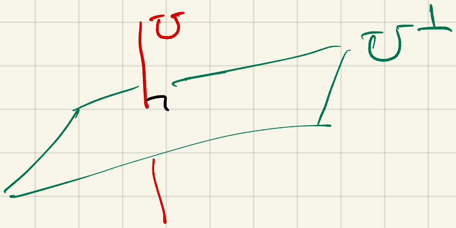
$\underline{U \text{ sottosp.}}$ $\quad U^\perp$ sottosp. ← dimensione?

$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3$





Teorema Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio di dimensione r.

Allora $\dim U^\perp = n-r$

Cioè $\dim U + \dim U^\perp = n = \dim(\mathbb{R}^n)$

Dim.

Sia $\{u_1, \dots, u_r\}$ base di U.

Considero un vettore incognito $v \in \mathbb{R}^n$.

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad v \in U^\perp \iff \begin{cases} u_1 \cdot v = 0 \\ u_2 \cdot v = 0 \\ \vdots \\ u_r \cdot v = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1^T v = 0 \\ u_2^T v = 0 \\ \vdots \\ u_r^\perp v = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} — & u_1 & — \\ — & u_2 & — \\ & \vdots & \\ — & u_r & — \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

rango$(A) = r$ (perché $u_1, \dots, u_r$ sono lin. indip.)

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^r \qquad \Rightarrow \ker(f) = U^\perp$$
$$f(X) = AX$$

$$\underbrace{\dim(\ker(f))}_{\dim(U^\perp)} + \underbrace{\dim(\operatorname{Im}(f))}_{\text{rango di } A = r} = \dim(\mathbb{R}^n) = n$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\dim(U^\perp) = n-r} \quad \blacksquare$$

Osserviamo che $U \cap U^\perp = \{\vec{0}\}$

<u>Dim</u> Se $v \in U \cap U^\perp$ allora $v \in U$ e $v \in U^\perp$

$$\Rightarrow v \cdot v = 0 \Leftrightarrow \|v\|^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{v = \vec{0}} \quad \blacksquare$$

Pertanto

$$\dim(U + U^\perp) = \underbrace{\dim U}_{r} + \underbrace{\dim U^\perp}_{n-r} - \underbrace{\dim(U \cap U^\perp)}_{0}$$

$$\Rightarrow \dim(U + U^\perp) = n.$$

$$\Rightarrow U + U^\perp = \mathbb{R}^n$$

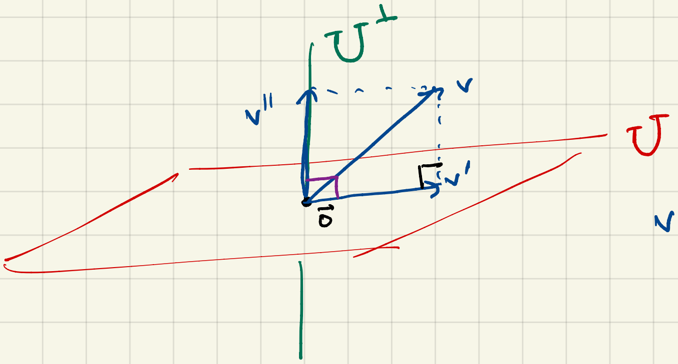
$$\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$$

Quindi ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ si scrive in modo unico come somma di un vettore di U e un vettore di $U^\perp$.

<u>Es.</u> $\mathbb{R}^3$: $U =$ un piano in $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \dim U = 2$

$\Leftrightarrow \dim U^\perp = 1$

$\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$



$$v = \underset{\substack{\Uparrow \\ U}}{v'} + \underset{\substack{\Uparrow \\ U^\perp}}{v''} \qquad v' \cdot v'' = 0$$

v' è la proiezione ortogonale di v su U

v'' è la proiezione ortogonale di v su $U^\perp$

$(U^\perp)^\perp = U$

$$v' = \Pi_U^{U^\perp}(v) = \Pi_U(v)$$

$$v'' = \Pi_{U^\perp}^{U}(v) = \Pi_{U^\perp}(v)$$

In generale: Come si possono calcolare v' e v'' se conosco il vettore v?

Metodo 1: $U \subseteq \mathbb{R}^n$
Conosco una base di U $\{u_1, \dots, u_r\}$

Calcolo una base di $U^\perp$: $\{w_1, \dots, w_{n-r}\}$

$$v = \underset{\in U}{v'} + \underset{\in U^\perp}{v''}$$

$v' \in U \Rightarrow v' = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_r$ incognite

$v'' \in U^\perp \Rightarrow v'' = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_{n-r} w_{n-r}$ ($\beta_1, \dots, \beta_{n-r}$ incognite

Si trova

$$v = \underbrace{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r}_{v'} + \underbrace{\beta_1 w_1 + \dots + \beta_{n-r} w_{n-r}}_{v''}$$

Si ottiene un sistema di eq. lineari di n equazioni per n incognite.

Ci sono medoti più semplici (che usano meno incognite)

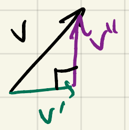
Es. $U \subseteq \mathbb{R}^4$ $\quad U = \langle u_1, u_2 \rangle$

$u_1 = (2, 0, -1, 1)$

$u_2 = (1, -1, 3, 0)$

$v = (4, 1, 3, -2) \in \mathbb{R}^4$

Vogliamo scrivere $v = v' + v''$, $v' \in U$, $v'' \in U^\perp$.



Cerco una base di $U^\perp$.

$$w \in U^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} w \cdot u_1 = 0 \\ w \cdot u_2 = 0 \end{cases} \qquad w = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 0 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 + x_4 = 0 \\ 1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = -2x_1 + x_3 \\ x_2 = x_1 + 3x_3 \end{cases} \leftarrow \text{Due parametri liberi di valore}$$

x_1, x_3

Base di $U^\perp$ $\quad \begin{array}{l|l} x_1 = 1 & x_1 = 0 \\ x_2 = 1 & x_2 = 3 \\ x_3 = 0 & x_3 = 1 \\ x_4 = -2 & x_4 = 1 \end{array}$ $\quad$ Base di $U^\perp$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix}4\\1\\3\\-2\end{pmatrix} = \underbrace{\overbrace{\alpha_1 \begin{pmatrix}2\\0\\-1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\0\end{pmatrix}}^{v'}}_{\in U} + \underbrace{\overbrace{\beta_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-2\end{pmatrix}+\beta_2\begin{pmatrix}0\\3\\1\\1\end{pmatrix}}^{v''}}_{\in U^\perp}$$

Sistema per $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 4 eq.
4 incognite

Metodo 2: $v = v' + v''$ $v' = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$

$$\overset{\Uparrow}{\underset{U}{}}\qquad \overset{\Uparrow}{\underset{U^\perp}{}}$$

$$v'' = v - v' = v - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2$$

$v'' \in U^\perp$ allora: $\begin{cases} u_1 \cdot v'' = 0 \\ u_2 \cdot v'' = 0 \end{cases}$ ← Sistema di 2 equazioni per 2 incognite α_1, α_2

$$v'' = \underset{v}{\begin{pmatrix}4\\1\\3\\-2\end{pmatrix}} - \alpha_1 \underset{u_1}{\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\1\end{pmatrix}} - \alpha_2 \underset{u_2}{\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}4 - 2\alpha_1 - \alpha_2\\ 1 + \alpha_2 \\ 3 + \alpha_1 - 3\alpha_2 \\ -2 - \alpha_1\end{pmatrix}$$

$$u_1 \cdot v'' = 0 \iff 2(4 - 2\alpha_1 - \alpha_2) + 0(\quad) + (-1)(3 + \alpha_1 - 3\alpha_2) + 1(-2 - \alpha_1) = 0$$

$$\underline{3 - 6\alpha_1 + \alpha_2 = 0}$$

$$u_2 \cdot v'' = 0 \iff 1 \cdot (4 - 2\alpha_1 - \alpha_2) - 1(1 + \alpha_2) + 3(3 + \alpha_1 - 3\alpha_2) + 0(\,) = 0$$

$$\underline{12 + \alpha_1 - 11\alpha_2 = 0}$$

$$\begin{cases} -6\alpha_1 + \alpha_2 = -3 \\ \alpha_1 - 11\alpha_2 = -12 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \frac{9}{13}, \quad \alpha_2 = \frac{15}{13}$$

$$\Rightarrow \quad v' = \frac{9}{13}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{15}{13}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 33 \\ -15 \\ 36 \\ 9 \end{pmatrix}$$

ortogonali

$$v'' = v - v' = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 33 \\ -15 \\ 36 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 19 \\ 28 \\ 3 \\ -35 \end{pmatrix}$$

Riassunto del metodo 2:

$\{u_1, \dots, u_r\}$ base di U

$\{w_1, \dots, w_{n-r}\}$ base di $U^\perp$

$$v = \underset{\in U}{v'} + \underset{\in U^\perp}{v''}$$

$v' = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r$

$v'' = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_{n-r} w_{n-r}$

$v'' = v - v'$ oppure $v' = v - v''$

Impongo: $\begin{cases} u_1 \cdot v'' = 0 \\ \vdots \\ u_r \cdot v'' = 0 \end{cases}$

Impongo: $\begin{cases} w_1 \cdot v' = 0 \\ \vdots \\ w_{n-r} \cdot v' = 0 \end{cases}$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\begin{cases} u_1 \cdot (v - \alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_r u_r) = 0 \\ \vdots \\ u_r \cdot (v - \alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_r u_r) = 0 \end{cases}}$$

Sistema di r equazioni per r incognite $\alpha_1, \dots, \alpha_r$

$$\Updownarrow$$

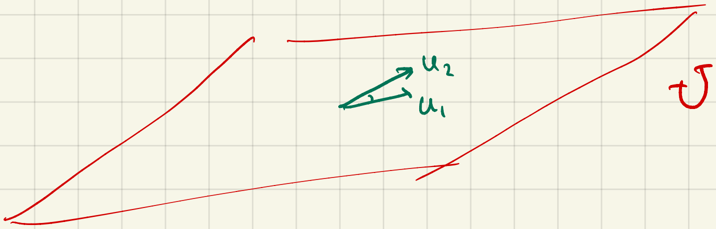
$$\underbrace{\begin{cases} w_1 \cdot (v - \beta_1 w_1 - \dots - \beta_{n-r} w_{n-r}) = 0 \\ \vdots \\ w_{n-r} \cdot (v - \beta_1 w_1 - \dots - \beta_{n-r} w_{n-r}) = 0 \end{cases}}$$

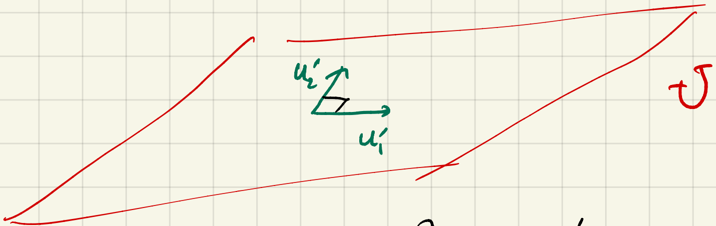
Sistema di $n-r$ equazioni per $n-r$ incognite $\beta_1, \dots, \beta_{n-r}$

BASI ORTOGONALI

(e basi ortonormali)

(vedi Libro Cap 5 p. 203)





$\{u_1', u_2'\}$ $\quad u_1' \cdot u_2' = 0$
base ortogonale di U

U sottospazio di $\mathbb{R}^n$

Prop: Siano $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{R}^n$ vettori non nulli e due a due ortogonali

$$u_i \cdot u_j = 0 \quad \forall i \neq j \qquad u_i \neq \vec{0} \quad \forall i$$

allora $u_1, \dots, u_r$ sono linearmente indipendenti.

Dim: $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r = \vec{0}$

Prodotto scalare con u_1: $\underbrace{u_1 \cdot (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r)} = u_1 \cdot \vec{0} = 0$

$$\lambda_1 \underbrace{(u_1 \cdot u_1)}_{\|u_1\|^2} + \lambda_2 \underbrace{(u_1 \cdot u_2)}_{0} + \dots + \lambda_r \underbrace{(u_1 \cdot u_r)}_{0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \underbrace{\|u_1\|^2}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$\Rightarrow \quad \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_r u_r = \vec{0}$

Prodotto scalare con u_2: $\quad \lambda_2 \|u_2\|^2 = 0 \underset{u_2 \neq 0}{\Rightarrow} \lambda_2 = 0$

$\vdots$ ecc.

$\underline{\lambda_r = 0}$ $\Rightarrow$ Quindi $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_r = 0$ e

$u_1, \dots, u_r$ sono lin. indip. ▨

Def. U sottosp. di $\mathbb{R}^n$. Una **base ortogonale** di U è una base $u_1', \dots, u_r'$ tale che i vettori u_i' sono due a due ortogonali fra di loro. Cioè $u_i' \cdot u_j' = 0 \quad \forall i \neq j$

Una base ortogonale si dice **ortonormale** se i vettori sono normalizzati (cioè hanno norma 1).

OSS: Una base ortogonale non è una base di $U^\perp$