ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

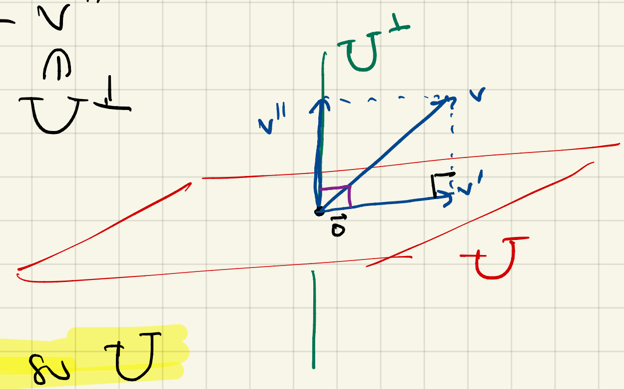
Lezioni 58-59, 15/12/2021

Prof. Luis García-Naranjo

Richiamo dalla lezione precedente:

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio allora $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$

$$v \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow v = \underset{\underset{U}{\cap}}{v'} + \underset{\underset{U^\perp}{\cap}}{v''}$$



$v' = \Pi_U(v) =$ proiezione ortogonale di v su U

<u>Esempio</u>: $U \subseteq \mathbb{R}^4$, $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ $\quad u_1 = (2, 0, -1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 3, 0)$

$v = (4, 1, 3, -2) \in \mathbb{R}^4$

Allora: $$U^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Pi_U(v) = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 33 \\ -15 \\ 36 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Siano $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{R}^n$ vettori non nulli e ortogonali

$(u_i \cdot u_j = 0 \quad \forall i \neq j)$ allora $u_1, \dots, u_r$ sono linearmente indipendenti.

$U \subseteq \mathbb{R}^n$. $\{u_1', \dots, u_r'\}$ base di U.

La base è ortogonale $\Leftrightarrow u_i' \cdot u_j' = 0 \quad \forall i \neq j$

La base è ortonormale se è ortogonale ed ogni vettore è normalizzato

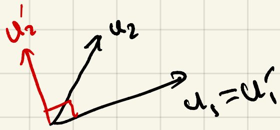
---

Problema: Come produrre una base ortogonale (o ortonormale) da una base qualunque?

Procedimento di Gram-Schmidt

Sia $u_1, \dots, u_r$ una base qualunque di U.

Prendo $\boxed{u_1' = u_1}$ (1° vettore della nuova base)



$u_2' =$ combinazione lineare di u_1', u_2 $= u_2 + \alpha_1 u_1'$

α_1 deve essere tale che

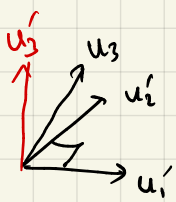
$$u_2' \cdot u_1' = 0$$

$$0 = u_2' \cdot u_1' = (u_2 + \alpha_1 u_1') \cdot u_1' = u_2 \cdot u_1' + \alpha_1 u_1' \cdot u_1'$$

$$= u_2 \cdot u_1' + \alpha_1 \|u_1'\|^2$$

$$\alpha_1 = -\frac{u_2 \cdot u_1'}{\|u_1'\|^2}$$

Si ottiene $\boxed{u_2' = u_2 - \frac{u_1' \cdot u_2}{\|u_1'\|^2} u_1'}$ (2° vettore della nuova base)



$$u_3' = u_3 + \alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2'$$

α_1 e α_2 devono essere tali che:

$$\begin{cases} u_1' \cdot u_3' = 0 \\ u_2' \cdot u_3' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1' \cdot (u_3 + \alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2') = 0 \\ u_2' \cdot (u_3 + \alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2') = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1' \cdot u_3 + \alpha_1 \|u_1'\|^2 + \alpha_2 \underbrace{u_1' \cdot u_2'}_{0} = 0 \\ u_2' \cdot u_3 + \alpha_1 \underbrace{u_2' \cdot u_1'}_{0} + \alpha_2 \|u_2'\|^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = -\frac{u_1' \cdot u_3}{\|u_1'\|^2}, \quad \alpha_2 = -\frac{u_2' \cdot u_3}{\|u_2'\|^2}$$

$$\boxed{u_3' = u_3 - \frac{u_1' \cdot u_3}{\|u_1'\|^2} u_1' - \frac{u_2' \cdot u_3}{\|u_2'\|^2} u_2'}$$

3° vettore della nuova base

$$u_4' = u_4 + \alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2' + \alpha_3 u_3'$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ devono essere tali che u_4' sia ortogonale a u_1', u_2', u_3'. Si ottiene

$$\alpha_1 = -\frac{u_1' \cdot u_4}{\|u_1'\|^2}, \quad \alpha_2 = -\frac{u_2' \cdot u_4}{\|u_2'\|^2}, \quad \alpha_3 = -\frac{u_3' \cdot u_4}{\|u_3'\|^2}$$

La formula generale è:

$$\boxed{u_k' = u_k - \left(\frac{u_1' \cdot u_k}{\|u_1'\|^2}\right) u_1' - \left(\frac{u_2' \cdot u_k}{\|u_2'\|^2}\right) u_2' - \dots - \left(\frac{u_{k-1}' \cdot u_k}{\|u_{k-1}'\|^2}\right) u_{k-1}'}$$

I vettori $u_1', u_2', \dots, u_r'$ sono una <u>base ortogonale</u> di U

I vettori $u_1'' = \frac{u_1'}{\|u_1'\|}, \ u_2'' = \frac{u_2'}{\|u_2'\|}, \dots, u_r'' = \frac{u_r'}{\|u_r'\|}$

sono una <u>base ortonormale</u> di U $\quad \|u_k''\| = 1$.

<u>Es.</u> $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = (1, 0, -2, 0) \\ u_2 = (1, 1, 0, -1) \\ u_3 = (0, 1, -1, 2) \end{array}\right\} \text{Non sono ortogonali.}$$

Trovare una base <u>ortogonale</u> (<u>ortonormale</u>) di U.

$$u_1' = u_1 \qquad \boxed{u_1' = (1, 0, -2, 0)}$$

$$u_2' = u_2 - \frac{u_2 \cdot u_1'}{\|u_1'\|^2} u_1'$$

$$u_2 \cdot u_1' = (1, 1, 0, -1) \cdot (1, 0, -2, 0) = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$$

$$\|u_1'\|^2 = 1^2 + 0^2 + (-2)^2 + 0^2 = 5$$

$$u_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 1 \\ 2/5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Oppure $\boxed{u_2' = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}} = 5 \begin{pmatrix} 4/5 \\ 1 \\ 2/5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$u_3' = u_3 - \frac{u_3 \cdot u_1'}{\|u_1'\|^2} u_1' - \frac{u_3 \cdot u_2'}{\|u_2'\|^2} u_2'$$

$$u_3 \cdot u_1' = (0, 1, -1, 2) \cdot (1, 0, -2, 0) = 0 + 0 + 2 + 0 = 2$$

$$\|u_1'\|^2 = 5$$

$$u_3 \cdot u_2' = (0, 1, -1, 2) \cdot (4, 5, 2, -5) = 0 + 5 - 2 - 10 = -7$$

$$\|u_2'\|^2 = 4^2 + 5^2 + 2^2 + (-5)^2 = 54 + 16 = 70$$

$$u_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{7}{70} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Moltiplico per 10

Oppure $u_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$

Oppure $u_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Base ortogonale

$$u_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2' = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad u_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base ortonormale:

$$\|u_1'\| = \sqrt{5}, \quad \|u_2'\| = \sqrt{70}, \quad \|u_3'\| = \sqrt{2}$$

$$u_1'' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2'' = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad u_3'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

(Es. base canonica)

$v \in \mathbb{R}^n$

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

$$\Rightarrow \quad v_1 \cdot v = v_1 \cdot (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)$$

$$= \lambda_1 \underbrace{v_1 \cdot v_1}_{\|v_1\|^2 = 1} + \underbrace{\lambda_2 \cancelto{0}{v_1 \cdot v_2} + \dots + \lambda_n \cancelto{0}{v_1 \cdot v_n}}_{0}$$

$$= \lambda_1 \qquad \text{Quindi} \quad \lambda_1 = v_1 \cdot v$$

$$v_2 \cdot v = v_2 \cdot (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)$$

$$= \lambda_1 \cancelto{0}{v_2 \cdot v_1} + \lambda_2 \underbrace{v_2 \cdot v_2}_{\|v_2\|^2 = 1} + \cancelto{0}{\lambda_3 v_2 \cdot v_3} + \dots + \lambda_n \cancelto{0}{v_2 \cdot v_n}$$

$$= \lambda_2 \qquad \text{Quindi} \quad \lambda_2 = v_2 \cdot v$$

$\vdots$ ecc.

$$\lambda_n = v_n \cdot v$$

<u>Quindi</u>: le coordinate di v rispetto alla base <u>ortonormale</u> $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono
$$\lambda_1 = v \cdot v_1 , \ \lambda_2 = v \cdot v_2 , \dots , \lambda_n = v \cdot v_n$$

<u>Metodo 3</u> per calcolare la proiezione ortogonale di $v \in \mathbb{R}^n$ su $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

$\{u_1, \dots, u_r\}$ base di U

$\downarrow$ Completo a una base di $\mathbb{R}^n$

$\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_{n-r}\}$

$\downarrow$ Gram-Schmidt + normalizzazione

$$\overbrace{\{\underbrace{u_1'', \dots, u_r''}_{\text{base ortonormale di } U}, \underbrace{v_1'', \dots, v_{n-r}''}_{\text{Base ortonormale di } U^\perp}\}}^{\text{Base ortonormale di } \mathbb{R}^n}$$

Se $v \in \mathbb{R}^n$ allora

$$v = \underbrace{\overbrace{(v \cdot u_1'')u_1'' + \dots + (v \cdot u_r'')u_r''}^{v'}}_{\in U} + \underbrace{\overbrace{(v \cdot v_1'')v_1'' + \dots + (v \cdot v_{n-r}'')v_{n-r}''}^{v''}}_{\in U^\perp}$$

$$\boxed{\Pi_U(v) = (v \cdot u_1'')u_1'' + \dots + (v \cdot u_r'')u_r''}$$

Serve solamente calcolare una base ortonormale di U. Non è necessario calcolare una base di $U^\perp$.

Es. $U \subseteq \mathbb{R}^4$ $\quad U = \langle u_1, u_2 \rangle$

$$u_1 = (2, 0, -1, 1)$$
$$u_2 = (1, -1, 3, 0)$$
$$v = (4, 1, 3, -2) \in \mathbb{R}^4$$

Trovare $\pi_U(v)$.

Trovo una base ortogonale di U.

$$u_1' = (2, 0, -1, 1) = u_1$$
$$u_2' = u_2 - \frac{u_2 \cdot u_1'}{\|u_1'\|^2} u_1'$$

$$u_2 \cdot u_1' = (2, 0, -1, 1) \cdot (1, -1, 3, 0) = 2 + 0 - 3 + 0 = -1$$
$$\|u_1'\|^2 = 2^2 + 0^2 + (-1)^2 + 1^2 = 6$$

$$u_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{-1}{6}\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6+2 \\ -6+0 \\ 18-1 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oppure $u_2' = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base ortogonale di } U.$$

$$u_1'' = \frac{u_1'}{\|u_1'\|}, \qquad u_2'' = \frac{u_2'}{\|u_2'\|}$$

$$\|u_1'\| = \sqrt{6}$$

$$\|u_2'\| = \sqrt{8^2 + (-6)^2 + 17^2 + 1^2} = \sqrt{390}$$

$$u_1'' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2'' = \frac{1}{\sqrt{390}} \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{base ortonormale di } U.$$

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

$$\Pi_U(v) = \underbrace{v'}_{\text{Proiezione ortogonale di } v \text{ su } U} = (u_1'' \cdot v)\, u_1'' + (u_2'' \cdot v)\, u_2''$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{390}} \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{390}} \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{8-3-2}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{32-6+51-2}{390} \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{3}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{75}{390} \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} (33, -15, 36, 9)$$

Sia $\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

Considero

$$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \qquad \left(P = M^{\underline{e}}_{\underline{v}}(id) \quad \underline{e} = \text{base canonica} \right)$$

$$P^T = \begin{pmatrix} \text{---} & v_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & v_n & \text{---} \end{pmatrix}$$

$$P^T P = \begin{pmatrix} \text{---} & v_1 & \text{---} \\ \text{---} & v_2 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & v_n & \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \cdots & v_1 \cdot v_n \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & \cdots & v_2 \cdot v_n \\ \vdots & & & \\ v_n \cdot v_1 & v_n \cdot v_2 & \cdots & v_n \cdot v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\boxed{P^T = P^{-1}}$$

Def. Una matrice $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è detta <u>ortogonale</u> se $P^T P = I$.

OSS: P è ortogonale $\Leftrightarrow$ le colonne di P formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

$\Leftarrow$) le righe di P formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

Se P è ortogonale $\Rightarrow P^T P = I$

P^T è anche ortogonale $P^T (P^T)^T = P^T P = I$

$$(P^T)^{-1} = (P^T)^T$$

$U \subseteq \mathbb{R}^n$

Come trovare la matrice A della proiezione ortogonale $\Pi_U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica?

$\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$

$v \in \mathbb{R}^n \quad v = \underset{\overset{\Uparrow}{U}}{v'} + \underset{\overset{\Uparrow}{U^\perp}}{v''}$

$\Pi_U (v) = v'$

$\{u_1, \dots, u_r\}$ base di U

$\{w_1, \dots, w_{n-r}\}$ base di $U^\perp$

$\downarrow$ Gram-Schmidt + normalizzazione

$\{u_1'', \dots, u_r''\}$ base ortonormale di U

$\{w_1'', \dots, w_{n-r}''\}$ base ortonormale di $U^\perp$

$\underline{v} = \{ u_1'', \dots, u_r'', w_1'', \dots, w_{n-r}'' \}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

$$\Pi_U(u_i'') = \underset{\underset{1 \cdot u_i''}{\parallel}}{u_i''} \qquad i=1,\dots,r$$

(u_i'' è autovettore relativo a $\lambda=1$)

$$\Pi_U(w_j'') = \underset{\underset{0 \cdot w_j''}{\parallel}}{\vec{0}} \qquad j=1,\dots,n-r$$

(w_j'' è autovettore relativo a $\lambda=0$)

$$M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(\Pi_U) = D = \begin{pmatrix} \overset{r \times r}{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 \end{matrix}} & \bigcirc \\ \bigcirc & \underset{(n-r)\times(n-r)}{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$\underline{e} = \{ e_1, \dots, e_n \}$ base canonica.

$$A = M_{\underline{e}}^{\underline{e}}(\Pi_U) = \underbrace{P}_{M_{\underline{v}}^{\underline{e}}(id)} D \underbrace{P^{-1}}_{M_{\underline{e}}^{\underline{v}}(id)}$$

$$P = M_{\underline{v}}^{\underline{e}}(id) = \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ u_1'' & \cdots & u_r'' & w_1'' & \cdots & w_{n-r}'' \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = P^T$$

$$\boxed{A = PDP^T}$$

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = \underbrace{PDP^T}_{A}$$

Quindi $\boxed{A^T = A}$

A è una matrice di proiezione ortogonale (rispetto alla base canonica) $\iff$ $A^2 = A$, $A^T = A$