ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

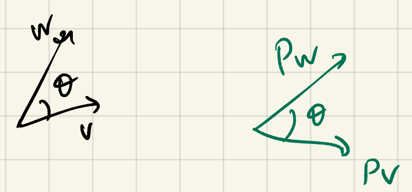
Lezione 62, asincrona

Prof. Luis García-Naranjo

Isometrie in $\mathbb{R}^3$

$$P \in O(3) \qquad P^T = P^{-1}$$
$$P^T P = I$$

Le colonne di P (anche le righe di P) formano una base <u>ortonormale</u> di $\mathbb{R}^3$.



<u>Lemma</u> Sia $P \in O(3)$ allora esiste una matrice $Q \in O(3)$ tale che

$$Q^{-1} P Q = Q^T P Q = \left(\begin{array}{c|cc} \pm 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{B} \end{array}\right) \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$Q^{-1} = Q^T$ perché $Q \in O(3)$

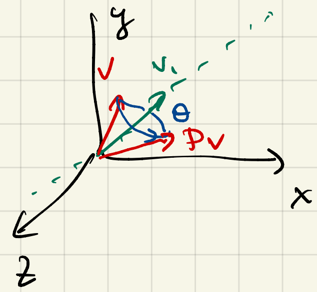
$B \in O(2)$

$\det B = 1$

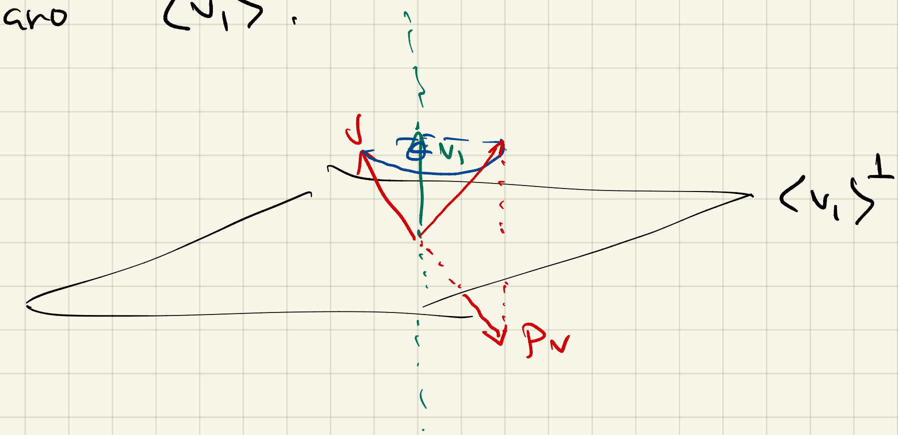
$B \in SO(2)$

Si ha $\begin{cases} +1 & \text{se } \det P = 1 \\ -1 & \text{se } \det P = -1 \end{cases}$

OSS. Se $\det P = 1$ (P è simmetria diretta) allora P è una <u>rotazione</u> attorno l'asse v_1 (v_1 è la prima colonna di Q) ed è autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 1$.



OSS. Se $\det P = -1$ allora P è la composizione di una rotazione attorno a v_1 con una riflessione di asse il piano $\langle v_1 \rangle^\perp$.



<u>Dim</u>

Il polinomio caratteristico $\det(P - \lambda I)$ ha grado 3.

$\Rightarrow$ Almeno una radice è reale.

Sia λ_1 autovalore di P con $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

Per quanto già visto (Lezioni 60-61) $\lambda = 1$ oppure $\lambda = -1$.

Sia v_1 autovettore relativo a λ_1 (normalizzato)

Completo a una base ortonormale

$\underline{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$.

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \in O(3) \qquad Q^T Q = I$$

Sia $P' = Q^T P Q$

$\left(\begin{array}{c} P' \text{ è la matrice} \\ \text{di } f(x) = PX \text{ rispetto} \\ \text{alla base } \underline{v} \\ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \end{array} \right)$

Abbiamo:

$$f(v_1) = Pv_1 = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$

$$\Downarrow$$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è la prima colonna di P'!

± 1

$$P' = Q^T P Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{B}} \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

<u>OSS.</u> $P' \in O(3)$ ✓

$$(P')^T P' = (\overbrace{Q^T P Q}^{P'})^T \overbrace{Q^T P Q}^{P'}$$

$$= Q^T P^T (Q^T)^T Q^T P Q$$

$$= Q^T P^T \underbrace{Q Q^T}_{I} P Q = Q^T \underbrace{P^T P}_{I} Q = \underbrace{Q^T Q}_{= I}$$

$P' \in O(3) \Rightarrow$ le righe di P' formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

$$\Rightarrow \quad \|(\lambda_1, a, b)\|^2 = 1$$

$$\|$$

$$\underbrace{\lambda_1^2}_{(\pm 1)^2 = 1} + a^2 + b^2 = 1 + a^2 + b^2$$

$$\left.\right\} \quad a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0, \; b = 0$$

$$\Rightarrow \quad P' = \left(\begin{array}{c|cc} \pm 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P'(P')^T = \underbrace{\left(\begin{array}{c|cc} \pm 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{B} \\ 0 & & \end{array}\right)}_{P'} \left(\begin{array}{c|cc} \pm 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{B^T} \\ 0 & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{BB^T} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad BB^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B \in O(2)$$

$$\det P' = (\pm 1) \det(B)$$

$$\|$$

$$\det P = \pm 1$$

P e P' sono matrici simili

$$\Rightarrow \det B = 1$$

$$\Downarrow$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Prop. (vedi Libro cap. 4, p. 160)

Sia $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$, A simmetrica $(A^T = A)$

allora A possiede esattamente n autovalori reali (eventualmente non tutti distinti)

Dim

$\det(A - \lambda I)$ ha n radici in $\mathbb{C}$.

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ gli autovalori di A.

Vogliamo dimostrare che $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. (sono reali).

Sia λ uno degli autovalori di A e sia v un autovettore.

$$\boxed{Av = \lambda v}$$

$\Downarrow$ Prendo il complesso coniugato

$$\overline{Av} = \overline{\lambda v}$$

$$\bar{A}\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

ma $\bar{A} = A$ perché A è reale

$$\Rightarrow \boxed{A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}} \quad (1)$$

$$\hookrightarrow \quad (Av)^T = (\lambda v)^T = v^T \underbrace{\lambda^T}_{\lambda \text{ è uno scalare}} = v^T \lambda = \lambda v^T$$

$$(Av)^T = v^T A^T = v^T A$$

$$\boxed{v^T A = \lambda v^T} \quad (2)$$

Moltiplico (2) a destra per $\bar{v}$:

$$v^T A \bar{v} = \lambda v^T \bar{v}$$

$$v^T A \bar{v} = v^T (\bar{\lambda} \bar{v}) = \bar{\lambda} v^T \bar{v}$$

$$\Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda}) v^T \bar{v} = 0$$

$$v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \qquad \bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$$

$$v^T \bar{v} = (z_1, \dots, z_n) \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix} = z_1 \bar{z}_1 + \dots + z_n \bar{z}_n$$
$$= |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$$

Quindi se $v \neq 0 \Rightarrow v^T \bar{v} = \underbrace{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}_{>0} \neq 0$

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \underbrace{v^T \bar{v}}_{\text{numero reale positivo } \neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda - \bar{\lambda} = 0 \iff \lambda = \bar{\lambda} \iff \lambda \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

Prop. Se $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, $A^T = A$ (simmetrica)

allora A è ortogonalmente diagonalizzabile.

Dim. Per induzione su n.

Per $n=1$ è ovvio.

Poiché A è simmetrica ha un autovalore $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Sia $v_1 \in \mathbb{R}^n$ autovettore normalizzato

$$\mathbb{R}^n = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_1 \rangle^\perp$$

Sia $\{v_2, \dots, v_n\}$ base ortonormale di $\langle v_1 \rangle^\perp$.

Quindi $\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Sia $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = AX$ $\qquad M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(f) = A' = ?$

$$f(v_1) = Av_1 = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow 1^a \text{ colonna di } A'$$

Sia $w \in \langle v_1 \rangle^\perp$ allora

A è simmetrica

$$(Aw) \cdot v_1 = (Aw)^T v_1 = w^T A^T v_1 = w^T A v_1 = w^T (\lambda_1 v_1)$$
$$= \lambda_1 w^T v_1 = \lambda_1 w \cdot v_1 = \lambda_1 0$$

$= 0$ $\qquad$ $w \in \langle v_1 \rangle^{\perp}$

Quindi $\underline{(Aw) \cdot v_1 = 0}$.

$$f(v_2) = Av_2 = \underbrace{\big((Av_2) \cdot v_1\big)}_{0} v_1 + \big((Av_2) \cdot v_2\big) v_2 + \dots + \big((Av_n) \cdot v_n\big) v_n$$

perché $v_2 \in \langle v_1 \rangle^{\perp}$

Quindi la 2^a colonna di A' è $\begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$

$$f(v_n) = Av_n = \underbrace{\big((Av_n) \cdot v_1\big) v_1}_{0} + \big((Av_n) \cdot v_2\big) v_2 + \dots + \big((Av_n) \cdot v_n\big) v_n$$

perché $v_n \in \langle v_1 \rangle^{\perp}$

Quindi la colonna n di A' è $\begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & * & & * \\ 0 & * & * & & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & * & & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & B & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$A' = M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(f) = P^{-1} A P = P^T A P$$

$$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \in O(n)$$

$$\Rightarrow (A')^T = (P^T A P)^T = P^T A^T (P^T)^T = \underbrace{P^T A P}_{A'}$$

$\Rightarrow$ A' è simmetrica.

Quindi:
$$(A')^T = A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix} \Bigg\} \text{ B è simmetrica.}$$
$$\| $$
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & B^T \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ B è una matrice $(n-1)\times(n-1)$ simmetrica

Ipotesi induttiva: B ha una base ortonormale di autovettori $v_2', \dots, v_n' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

I vettori
$$\underline{v}' = \left\{ \underset{v_1''}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2''}{\begin{pmatrix} 0 \\ v_2' \end{pmatrix}}, \underset{v_3''}{\begin{pmatrix} 0 \\ v_3' \end{pmatrix}}, \dots, \underset{v_n''}{\begin{pmatrix} 0 \\ v_n' \end{pmatrix}} \right\}$$
è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Sia $Q = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1'' & v_2'' & \cdots & v_n'' \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ allora

$$A'' = Q^T A' Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A'' = Q^T P^T A P Q$$
$$\parallel$$
$$(PQ)^T A \underbrace{PQ}$$

matrice ortogonale

$R = PQ$

$$R^T A R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ A è ortogonalmente diagonalizzabile. $\blacksquare$

Questo dimostra il Teorema Spettrale:

$A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ è ortogonalmente diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$ A è simmetrica.