ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 67-68, 10/01/2022

Prof. Luis García-Naranjo

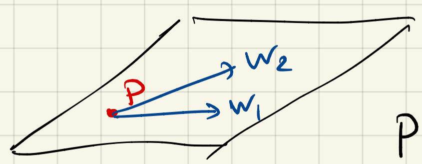
Richiamo dalla lezione precedente:

Spazio affine $\mathbb{A}^n(\mathbb{R}) = (\underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{punti}}, \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{vettori}}, \underbrace{+}_{\text{somma}})$

somma tra punti e vettori (il risultato è un punto)

Sottospazio affine $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \underbrace{P}_{\text{punto su } \mathcal{L}} + \underbrace{W}_{\text{sottospazio vettoriale di } \mathbb{R}^n}$$



$\mathcal{L} = P + \langle w_1, w_2 \rangle$

punto su $\mathcal{L}$

sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ (la giacitura di $\mathcal{L}$)

- $\dim \mathcal{L} = \dim W$.
- $\dim \mathcal{L} = 1 \Rightarrow \mathcal{L}$ è una retta
  $\dim \mathcal{L} = 2 \Rightarrow \mathcal{L}$ è un piano
  $\dim \mathcal{L} = n-1 \Rightarrow \mathcal{L}$ è un iperpiano
- $\{w_1, \dots, w_r\}$ base di W

$$\mathcal{L} : \{ X = P + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r, \ \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$$

Equazioni parametriche di $\mathcal{L}$.

Eliminando

$\downarrow$ i parametri $\lambda_1, \dots, \lambda_r$

$\mathcal{L} : \{ AX = B$ Equazioni cartesiane di $\mathcal{L}$. (sistema di $n-r$ equazioni indipendenti)

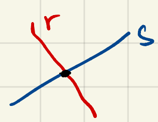
- $\mathcal{L}_1 : \{ A_1 X = B_1$
  $\mathcal{L}_2 : \{ A_2 X = B_2$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 : \underbrace{\begin{cases} A_1 X = B_1 \\ A_2 X = B_2 \end{cases}}_{AX = B}$

  Eq. cartesiane

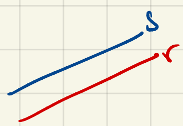
  metto a sistema per trovare l'intersezione

Posizione reciproche:

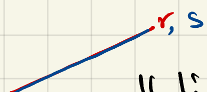
- due rette in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$



incidenti



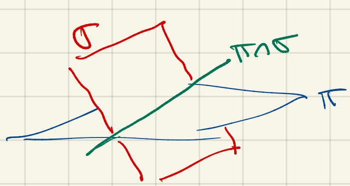
paralleli $r \cap s = \emptyset$



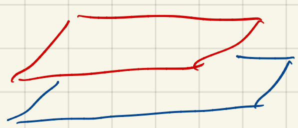
paralleli e coincidenti $r = s$

	incidenti	paralleli	paralleli e coincidenti
rango A	2	1	1
rango A|B	2	2	1

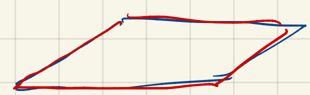
- due piani in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$



incidenti



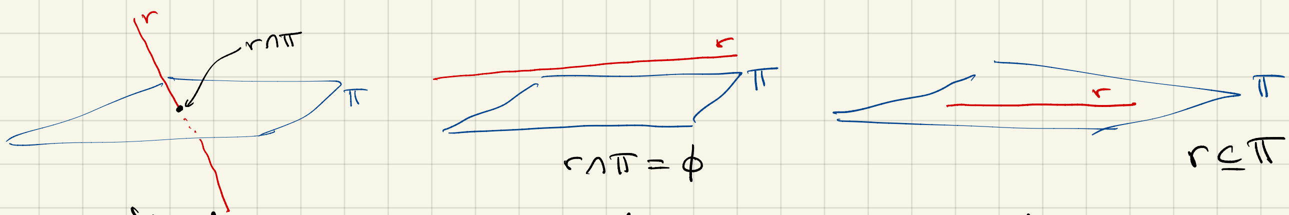
paralleli



paralleli e coincidenti

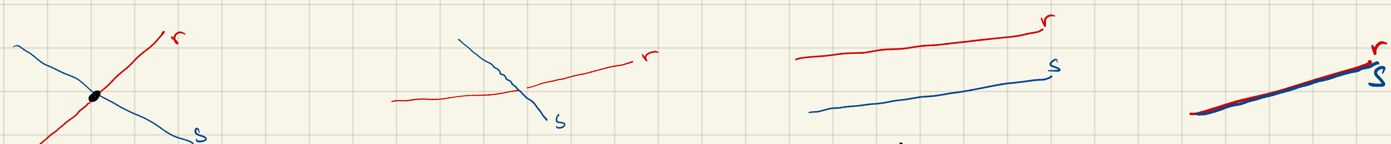
	incidenti	paralleli	paralleli e coincidenti
rango A	2	1	1
rango A|B	2	2	1

• una retta ed un piano in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$



	incidenti	paralleli	paralleli
rango A	3	2	2
rango A|B	3	3	2

• due rette in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$



	incidenti $r \cap s =$ un punto	sghembe $r \cap s = \emptyset$	parallele $r \cap s = \emptyset$	parallele e coincidenti $r = s$
rango A	3	3	2	2
rango A|B	3	4	3	2

<u>Es.</u> Date

$$r: \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad s_1: \begin{cases} x + y - 4z = 1 \\ x - y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$s_2: \begin{cases} 2x + 6z = 1 \\ 3x - 2y + 7z = 0 \end{cases}$$

Determinare pos. reciproca di r con s_1 e di r con s_2.

$$r \cap s_1 : \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y - 4z = 1 \\ x - y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{3^a r - 1^a r \\ 4^a r - 1^a r}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3^a r - 2 \cdot 2^a r]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-2 \cdot 4^a r + 3^a r]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

rango $(A) = 3$

rango $(A|B) = 4$

$r \cap s_1 = \emptyset$

r e s_1 sono <u>sghembe</u>.

$$r \cap s_2 : \begin{cases} \left.\begin{array}{l} x - y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{array}\right\} r \\ \left.\begin{array}{l} 2x + 6z = 1 \\ 3x - 2y + 7z = 0 \end{array}\right\} s_2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc|c} & A & & B \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 6 & 1\\ 3 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right)
\end{array}
\xrightarrow[\substack{4^a r - 3\cdot 1^a r}]{\substack{3^a r - 2\cdot 1^a r}}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{4^a r - 2^a r}]{\substack{3^a r - 2\cdot 2^a r}}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

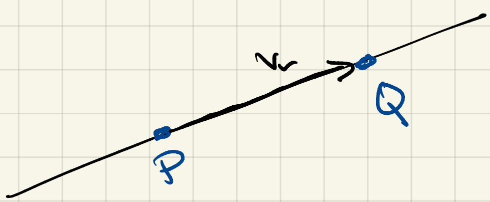
$\text{rango}(A) = 2$

$\text{rango}(A|B) = 3$

$r \cap s_2 = \emptyset$

r e s_2 sono parallele non incidenti.

Vettore direttore r:



$$r: \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Se $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x = 0,\ y = 0$

$P = (0, 0, 0)$

Se $z = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - y = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{x = -3}$

$Q = (-3, -1, 1)$

$$v_r = Q - P = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r: \{ X = P + \lambda v_r,\quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$r: \left\{ X = \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right. \qquad r: \left\{ \begin{array}{l} x = -3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Eq. parametriche di r.

Vettore direttore di s_2

$$s_2: \left\{ \begin{array}{l} 2x + 6z = 1 \\ 3x - 2y + 7z = 0 \end{array} \right.$$

Risolvo il sistema

$$s_2: \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(1 - 6z) = \frac{1}{2} - 3z \\ 3\left(\frac{1}{2} - 3z\right) - 2y + 7z = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} - 3z \\ -2y = 2z - \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} - 3z \\ y = -z + \frac{3}{4} \end{array} \right.$$

z è un parametro libero di variare!

Scrivo $z = \lambda$.

vettore direttore di s_2

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} - 3\lambda \\ y = -\lambda + \frac{3}{4} \\ z = \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Eq. parametriche di } s_2.} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

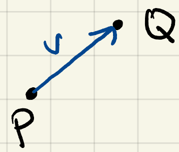
Def. Lo spazio affine euclideo standard di dimensione n è dato da

$$E^n = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, +)$$

punti, vettori, solita somma di $\mathbb{R}^n$

dotato dal prodotto scalare standard.

Distanza fra due punti P e Q



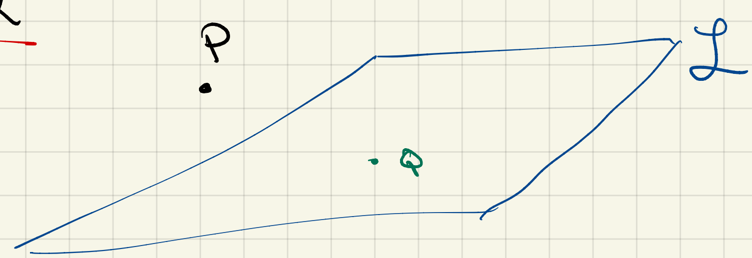
$$v = \overrightarrow{PQ} = Q - P$$

$$d(P, Q) = \|v\| = \sqrt{v \cdot v}$$

Proprietà:

1. $d(P, Q) = d(Q, P)$
2. $d(P, Q) \geq 0$ e $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$
3. $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$

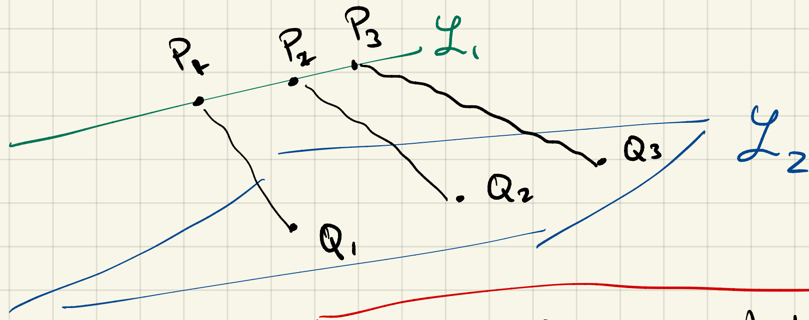
Distanza fra un punto P e un sottospazio affine $\mathcal{L}$



$$\boxed{d(P, \mathcal{L}) = \min_{Q \in \mathcal{L}} \{ d(P, Q) \}}$$

$d(P, \mathcal{L}) = 0 \Leftrightarrow P \in \mathcal{L}$.

Distanza fra due sottospazi affini:



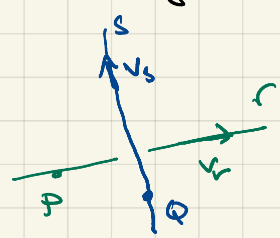
$$\boxed{d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \min_{P \in \mathcal{L}_1,\, Q \in \mathcal{L}_2} \{ d(P, Q) \}}$$

Ortogonalità:

- Due rette r, s in $\mathbb{E}^2, \mathbb{E}^3$ sono ortogonali se sono ortogonali le loro giaciture

$r = P + \langle v_r \rangle$

$s = Q + \langle v_s \rangle$

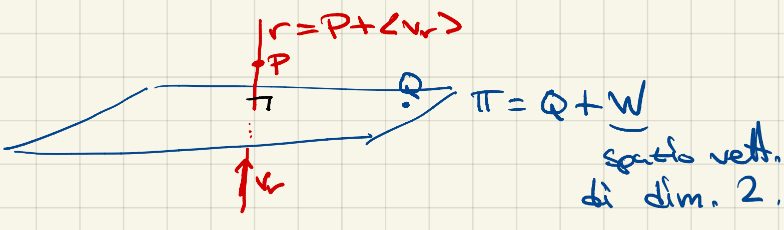


$$r \perp s \iff v_r \perp v_s$$

$$\iff \begin{cases} v_r \in \langle v_s \rangle^\perp \\ v_s \in \langle v_r \rangle^\perp \end{cases}$$

- In $\mathbb{E}^3$ una retta r e un piano π sono ortogonali se

$v_r \in W^\perp$



$$\Downarrow$$

$$\langle v_r \rangle = W^\perp$$

$$\Updownarrow$$

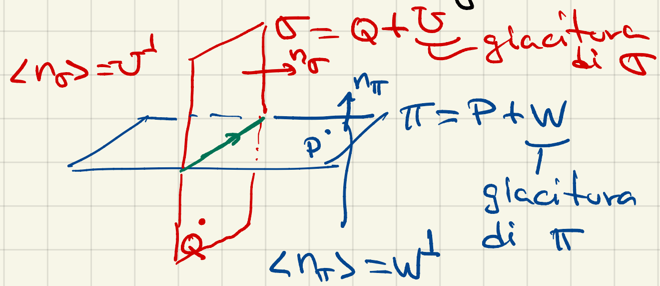
La giacitura di r è ortogonale alla giacitura di W.

- In $\mathbb{E}^3$ due piani π e σ sono ortogonali se

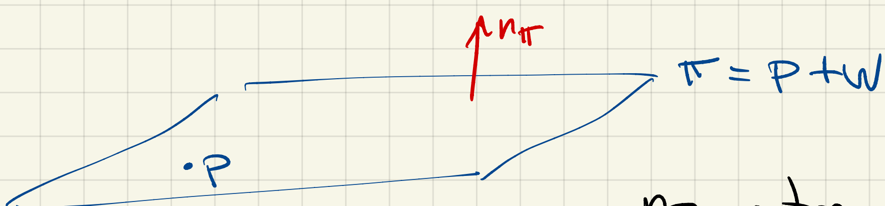
$$W^\perp \perp U^\perp$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{n_\pi \cdot n_\sigma = 0}$$



- In $\mathbb{E}^n$: un vettore v è ortogonale al sottospazio affine $\mathcal{L} = P + W$ se $v \in W^\perp$.



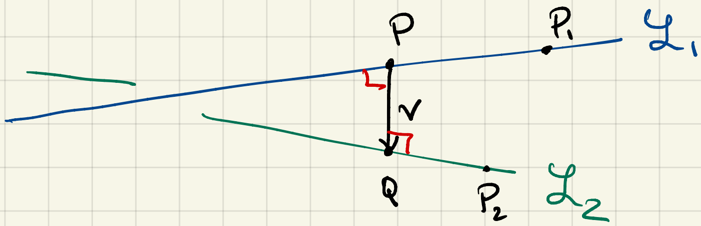
n_π ortogonale a π

$$\Updownarrow$$

$$n_\pi \in W^\perp.$$

<u>Teorema</u> $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ sottospazi affini di $\mathbb{E}^n$.

I punti $P \in \mathcal{L}_1$, $Q \in \mathcal{L}_2$ sono di minima distanza (cioè $d(P,Q) \leq d(R,S)$ $R \in \mathcal{L}_1$, $S \in \mathcal{L}_2$) $\Longleftrightarrow$ $v = Q - P$ è ortogonale sia a $\mathcal{L}_1$ che a $\mathcal{L}_2$.



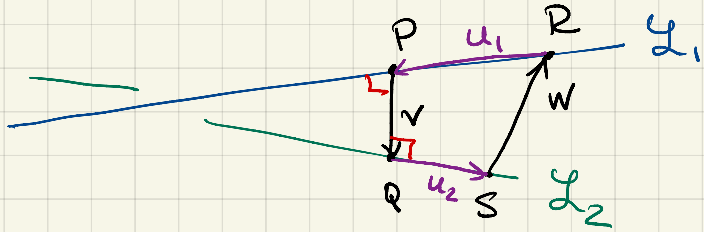
Dim.

Supp. $\mathcal{L}_1 = P_1 + U_1$ ← giacitura di $\mathcal{L}_1$

$\mathcal{L}_2 = P_2 + U_2$ ← giacitura di $\mathcal{L}_2$.

$\Leftarrow$) (ortogonalità $\Rightarrow$ distanza minima)

Siano $R \in \mathcal{L}_1$, $S \in \mathcal{L}_2$



Scrivo:
$$w = R - S$$
$$u_1 = P - R$$
$$u_2 = S - Q$$
$$v = Q - P$$

Allora $u_1 \in U_1$
$u_2 \in U_2$

Per Ipotesi: $v \cdot u_1 = 0$
$v \cdot u_2 = 0$

$$d(R, S) = \|w\|$$
$$d(P, Q) = \|v\|$$

Vogliamo dimostrare:
$$d(P, Q) \leq d(R, S)$$
$$\|v\| \leq \|w\|$$

Scrivo $-w = u_1 + v + u_2$

$$\|w\| = \|-w\| = \|u_1 + v + u_2\|$$

$$d(R,S)^2 = \|w\|^2 = \|u_1 + v + u_2\|^2$$

$$= \|v + (u_1+u_2)\|^2$$

$$= (v + (u_1+u_2)) \cdot (v + (u_1+u_2))$$

$$= \overbrace{v \cdot v}^{\|v\|^2} + v \cdot (u_1+u_2) + (u_1+u_2) \cdot v$$

$$+ \underbrace{(u_1+u_2) \cdot (u_1+u_2)}_{\|u_1+u_2\|^2}$$

$$= \|v\|^2 + \|u_1+u_2\|^2 + \underbrace{v \cdot u_1}_{0} + \underbrace{v \cdot u_2}_{0}$$

$$+ \underbrace{u_1 \cdot v}_{0} + \underbrace{u_2 \cdot v}_{0}$$

$$\geq \|v\|^2 = d(P,Q)^2$$

Quindi: $\quad d(R,S)^2 \geq d(P,Q)^2 \implies d(P,Q) \leq d(R,S)$ ∎

$\Rightarrow$) Supp. $P \in \mathcal{L}_1$, $Q \in \mathcal{L}_2$ sono di minima distanza. Sia $v = Q - P$.

Devo dimostrare che v è ortogonale sia a $\mathcal{L}_1$ che a $\mathcal{L}_2$.

Cioè che v è ortogonale sia a $\mathcal{V}_1$ che a $\mathcal{V}_2$.

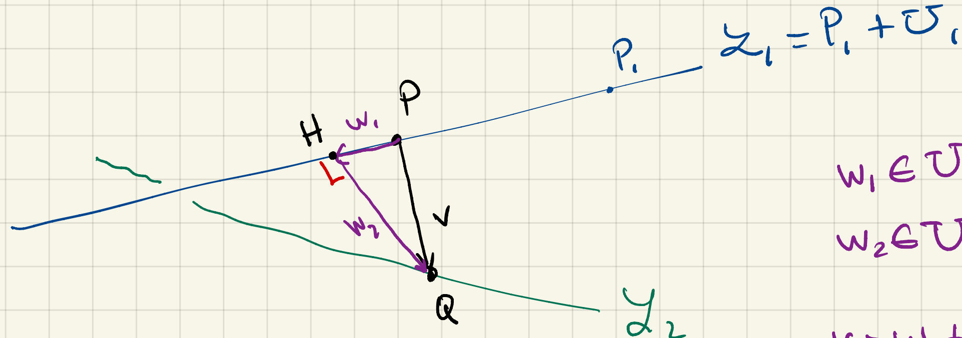
Supponiamo che v non sia ortogonale a U_1 $\quad (v \notin U_1^\perp)$

Sappiamo che $\mathbb{R}^n = U_1 \oplus U_1^\perp$

Allora $v = w_1 + w_2$, con $w_1 \in U_1$, $w_2 \in U_1^\perp$

e $\underline{\underline{w_1 \neq \vec{0}}}$, perché $v \notin U_1^\perp$

Fatto il 12/01/2022



$w_1 \in U_1$

$w_2 \in U_1^\perp$

$v = w_1 + w_2$

Sia $H = P + w_1 \in \mathcal{L}_1$

$Q - H = w_2 \qquad d(Q, H) = \|w_2\|$

Quindi
$$\begin{aligned} d(P,Q)^2 &= \|v\|^2 = \|w_1 + w_2\|^2 = (w_1+w_2)\cdot(w_1+w_2) \\ &= w_1\cdot w_1 + w_2 \cdot w_2 + 2\cancelto{0}{w_1 \cdot w_2} \\ &= \|w_1\|^2 + \underbrace{\|w_2\|^2}_{d(Q,H)^2} \\ &= d(Q,H)^2 + \underbrace{\|w_1\|^2}_{>0} \\ &> d(Q,H)^2 \end{aligned}$$

Cioè $d(Q,H)^2 < d(P,Q)^2 \Rightarrow d(Q,H) < d(P,Q)$

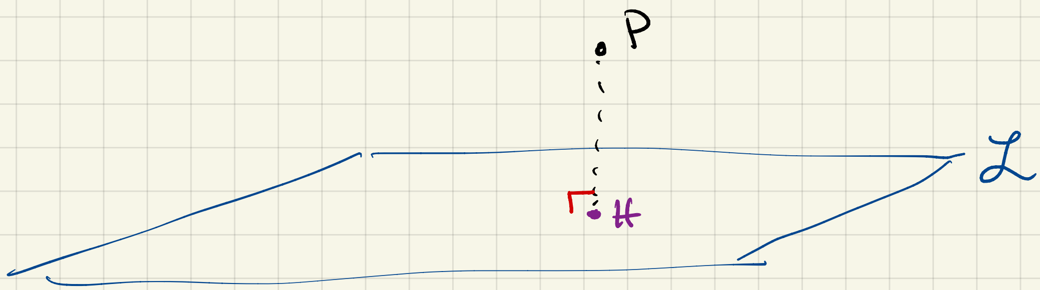
ASSURDO perché P e Q sono punti di minima distanza.

$$\Rightarrow v = Q - P \in U_1^{\perp}$$

Allo stesso modo si dimostra che $v \in U_2^{\perp}$ $\boxtimes$

Caso particolare del teorema precedente

Distanza tra un punto P e un sottospazio affine $\mathcal{L}$



$d(P, \mathcal{L}) = d(P, H)$ dove $H \in \mathcal{L}$ è il punto tale che il vettore $\overrightarrow{PH}$ sia ortogonale a $\mathcal{L}$.

H è detto la proiezione ortogonale di P su $\mathcal{L}$. (H è il punto di minima distanza di P a $\mathcal{L}$)

Come trovare la proiezione ortogonale di P su $\mathcal{L}$?

Es. In $\mathbb{E}^3$. Sia $P = (1, 2, -1)$

Sia r la retta passante per $Q = (0, 3, 2)$ e parallela al vettore $v = (2, -1, -2)$

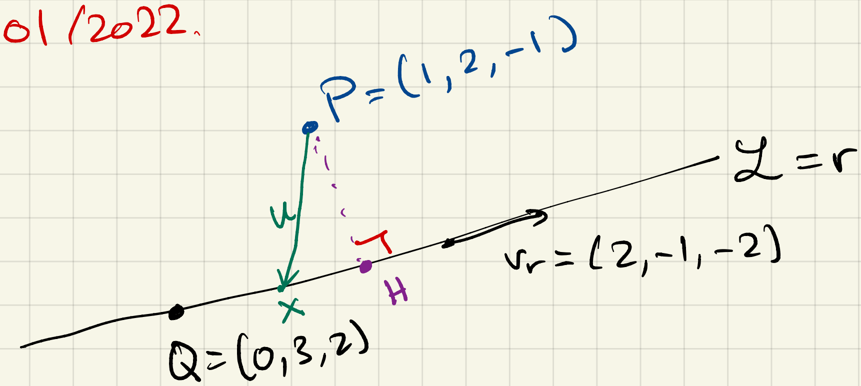
(i) Calcolare la proiezione ortogonale di P su r.

(è il punto H)

(ii) Calcolare la distanza di P a r

$\left(d(P,r) = d(P,H) = \| P - H \| \right)$

Fatto il 12/01/2022.



$X = Q + \lambda v_r \longleftarrow$ punto generico su r

$u = X - P = Q - P + \lambda v_r$

$$= \underset{Q}{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}} - \underset{P}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}} + \lambda \underset{v_r}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -1 + 2\lambda \\ 1 - \lambda \\ 3 - 2\lambda \end{pmatrix}$$

Richiedo che $u \perp v_r$

$$u \cdot v_r = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 + 2\lambda \\ 1 - \lambda \\ 3 - 2\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$\{ -2 + 4\lambda - 1 + \lambda - 6 + 4\lambda = 0$

$$\begin{cases} -9 + 9\lambda = 0 \end{cases}$$

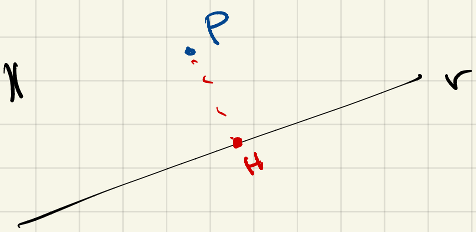
$$\begin{cases} \lambda = 1 \end{cases}$$

Sostituendo $\lambda = 1$ si trova il punto H

$$H = Q + 1 \cdot v_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

proiezione ortogonale di P su r (punto di minima distanza).



$$\Rightarrow \quad d(r, P) = d(H, P) = \| H - P \|$$

$$H - P = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\| H - P \| = \| (1, 0, -1) \| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad d(P, r) = \sqrt{2}$$