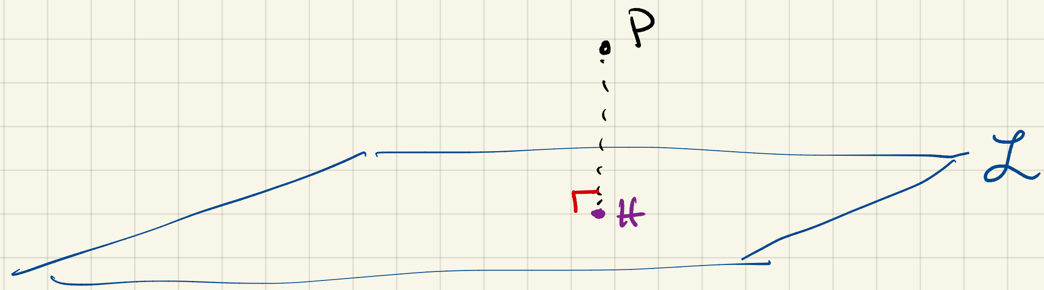
ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 69-70, 12/01/2022

Prof. Luis García-Naranjo

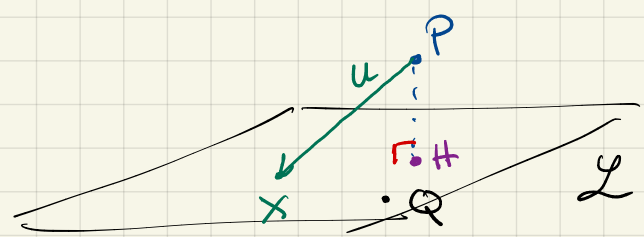
Distanza tra un punto P e un sottospazio affine $\mathcal{L}$



$d(P,\mathcal{L}) = d(P,H)$ dove $H \in \mathcal{L}$ è il punto tale che il vettore $\overrightarrow{PH}$ sia ortogonale a $\mathcal{L}$.

H è detto la proiezione ortogonale di P su $\mathcal{L}$. (H è il punto di minima distanza di P a $\mathcal{L}$)

Come trovare la proiezione ortogonale di P su $\mathcal{L}$?



$$\mathcal{L} = Q + \underbrace{W}_{\text{giacitura di } \mathcal{L}.}$$

$$u = \overrightarrow{PX} = X - P$$

$$W = \underbrace{\langle w_1, \dots, w_r \rangle}_{\text{base di } W}$$

$$X = Q + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r$$ ← Punto generico di $\mathcal{L}$.

$u = X - P = Q - P + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r$

Vogliamo trovare $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ in modo che

u sia ortogonale a $\mathcal{L} \Rightarrow u$ deve essere ortogonale ai vettori $w_1, \dots, w_r$.

$$\begin{cases} u \cdot w_1 = 0 \\ \vdots \\ u \cdot w_r = 0 \end{cases}$$

r equazioni lineari per l'incognite $\lambda_1, \dots, \lambda_r$

Risolvendo il sistema si trovano $\lambda_1, \dots, \lambda_r$

Il punto X che corrisponde a questi coefficienti è il punto H cercato.

$\mathbb{E}^n$ spazio ambiente

$\mathcal{L}$ sottospazio affine descritto da <u>una sola equazione lineare</u>

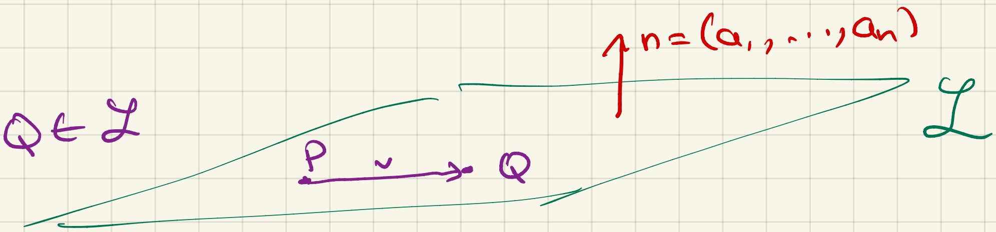
$$\boxed{\mathcal{L}: a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + d = 0}$$

$\left(\begin{array}{l} \dim \mathcal{L} = n-1 \\ \mathcal{L} \text{ è iperpiano} \end{array}\right)$

<u>Teorema</u> (vedi Libro, cap. 5, p. 266)

Il vettore $n = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ è ortogonale al sottospazio affine $\mathcal{L}$.

$P, Q \in \mathcal{L}$



$v = \overrightarrow{PQ} = Q - P$

allora $\quad v \cdot n = 0$

Dim.

$P, Q \in \mathcal{L} \qquad P = (p_1, \dots, p_n)$

$\qquad\qquad\qquad Q = (q_1, \dots, q_n)$

$$\Rightarrow \quad Q - P = v = (q_1 - p_1, \dots, q_n - p_n)$$

$P \in \mathcal{L} \Rightarrow \quad a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + d = 0$

$Q \in \mathcal{L} \Rightarrow \quad a_1 q_1 + \dots + a_n q_n + d = 0$

$$\Rightarrow a_1(q_1 - p_1) + \dots + a_n(q_n - p_n) + \cancel{d} - \cancel{d} = 0$$

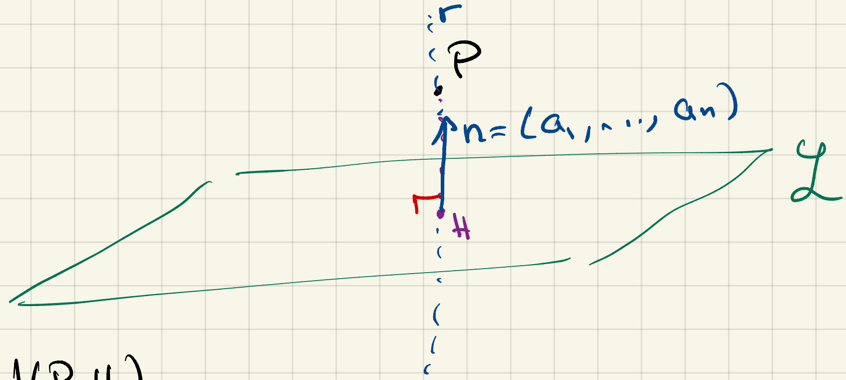
$$\underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{n} \cdot \underbrace{(q_1 - p_1, \dots, q_n - p_n)}_{Q-P} = 0$$

$$\Rightarrow n \cdot (Q - P) = 0$$

Quindi n è ortogonale a $\mathcal{L}$ $\blacksquare$

Distanza tra un punto $P = (p_1, \dots, p_n)$ e il sottospazio affine $\mathcal{L}$ di equazione

$\mathcal{L}: a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + d = 0$ (iperpiano)



$d(P, \mathcal{L}) = d(P, H)$

r retta per P ortogonale a $\mathcal{L}$

$r: X = P + \lambda \underbrace{n}_{\text{vettore direttore di } r}$ Eq. parametrica di r

$$r: \begin{cases} x_1 = p_1 + \lambda a_1 \\ \vdots \\ x_n = p_n + \lambda a_n \end{cases}$$

$$H = r \cap \mathcal{L} : \begin{cases} x_1 = p_1 + \lambda a_1 \\ \vdots \\ x_n = p_n + \lambda a_n \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + d = 0 \end{cases}$$

$$a_1 (p_1 + \lambda a_1) + a_2 (p_2 + \lambda a_2) + \dots + a_n (p_n + \lambda a_n) + d = 0$$

$$\lambda (a_1^2 + \dots + a_n^2) + a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n + d = 0$$

$$\boxed{\lambda = - \frac{(a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + d)}{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$$

$$H = P + \lambda n$$

$$d(P, \mathcal{L}) = d(P, H) = \| H - P \|$$

$$= \| P + \lambda n - P \|$$

$$= \| \lambda n \|$$

$$= |\lambda| \, \| n \|$$

$n = (a_1, \dots, a_n$

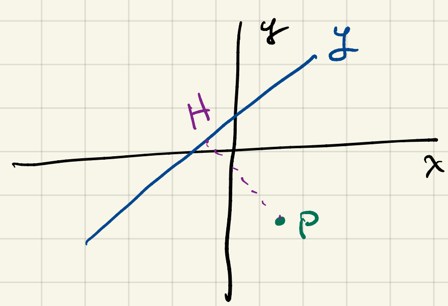
$$= \frac{|a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + d|}{a_1^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$$

$$= \frac{|a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + d|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$$

$$\boxed{d(P, \mathcal{L}) = \frac{|a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + d|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}}$$

$\mathcal{L}: a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + d = 0$

<u>Es.</u> In $\mathbb{E}^2$



$P = (3, -5)$

$\mathcal{L}: 2x - y + 3 = 0$

$a_1 = 2 \quad a_2 = -1 \quad d = 3$

$$d(P, \mathcal{L}) = \frac{|2(3) - 1(-5) + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|14|}{\sqrt{5}} = \frac{14}{\sqrt{5}}$$

<u>Es.</u> In $\mathbb{E}^3$

$P = (2, -1, 3)$

$Q = (0, -3, 2)$

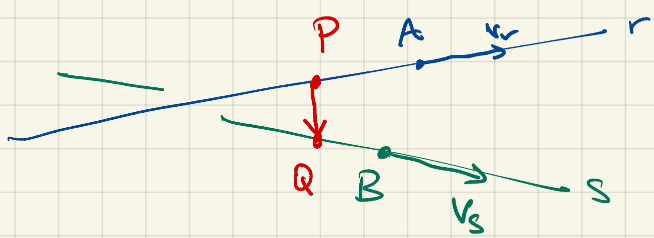
$\pi: \ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 = 0$

$$d(P,\pi) = \frac{|2(2)+2(-1)+1\cdot 3-5|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{|0|}{\sqrt{9}} = 0 \Rightarrow P \in \pi$$

$$d(Q,\pi) = \frac{|2(0)+2(-3)+1\cdot(2)-5|}{\sqrt{9}} = \frac{|-9|}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\underline{d(Q,\pi) = 3}.$$

Distanza tra due rette sghembe in $\mathbb{E}^3$



Cerco $P \in r$, $Q \in s$ tali che il vettore

$\overrightarrow{PQ} = Q - P$ sia ortogonale a v_r e a v_s

$$d(r,s) = d(P,Q) = \|Q-P\|$$

$$\left.\begin{aligned} P &= A + \lambda v_r \\ Q &= B + \mu v_s \end{aligned}\right\} \ \lambda, \mu \text{ incognite.}$$

$$Q - P = B - A + \mu v_s - \lambda v_r$$

Richiedo che $Q-P \perp v_r$ e $Q-P \perp v_s$

$$\begin{cases} (Q-P)\cdot v_r = 0 \\ (Q-P)\cdot v_s = 0 \end{cases}$$

sistema di eq. per le due incognite λ, μ.

Si risolve il sistema e si trovano i punti Q, P.

$$d(r,s) = d(P,Q).$$

Es.

r retta passante per $A = (-1, 2, -3)$ parallela a $(1, -1, 2)$

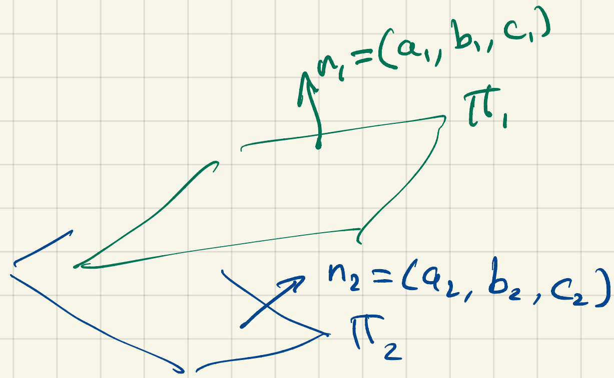
s retta passante per $B = (0, -3, 0)$ parallela a $(1, -3, -2)$

$d(r,s) = ?$ $\quad \left(\frac{\sqrt{189}}{7} \right)$

Distanza tra due piani in $\mathbb{E}^3$

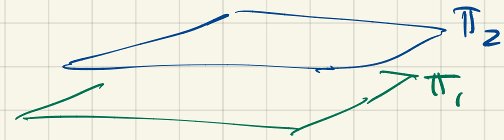
$\pi_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$

$\pi_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$



(i) Se n_1 e n_2 sono lin. indip. allora $\pi_1 \cap \pi_2$ = una retta. $\Rightarrow d(\pi_1, \pi_2) = 0$

(ii) Se $n_1 \,//\, n_2 \Rightarrow \pi_1 \,//\, \pi_2$



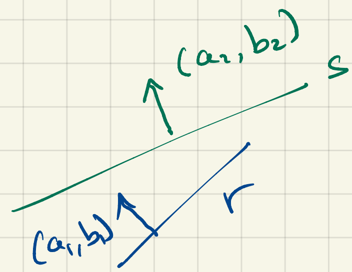
Sia $P \in \pi_1 \Rightarrow d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2)$

FASCIO DI RETTE

(In $\mathbb{E}^2$)

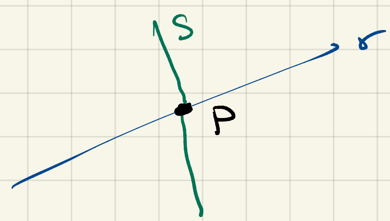
$r: a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$

$s: a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$



Se (a_1, b_1) e (a_2, b_2) sono lin. indip.

$\Rightarrow r \cap s =$ punto P



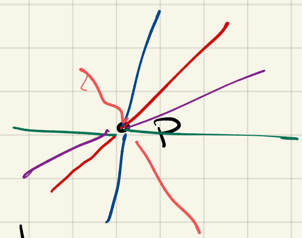
Prendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(*) \quad \alpha(a_1 x + b_1 y + c_1) + \beta(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$$

(Combinazione lineare delle equazioni)

$$\underbrace{(\alpha a_1 + \beta a_2)x + (\alpha b_1 + \beta b_2)y + \alpha c_1 + \beta c_2}_{\text{Equazioni di una retta passante per } P.} = 0$$

Al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ottengono infinite rette. Tutte queste rette contengono al punto P

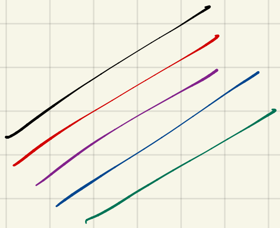


* Si chiama fascio di rette che si intersecano in un unico punto P

Oppure: Fascio proprio di sostegno P

* Caso particolare: se i vettori (a_1, b_1) e (a_2, b_2) sono paralleli $\Rightarrow s // r$ si ottiene un fascio improprio di rette parallele a r

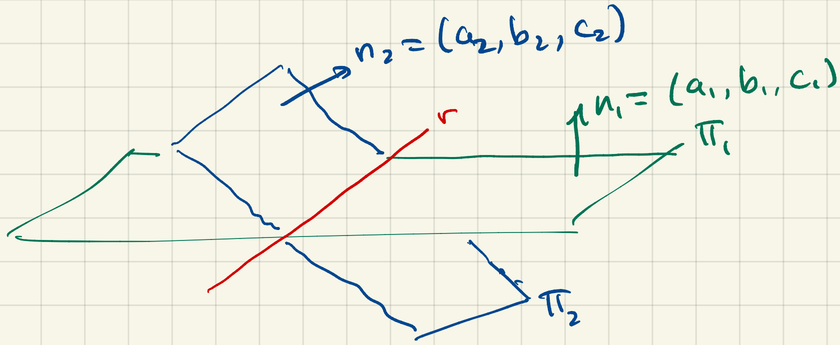
$$a_1 x + b_1 y + \gamma = 0 \quad \gamma \in \mathbb{R}$$



FASCIO DI PIANI

In $\mathbb{E}^3$. Equazioni cartesiane di una retta r

$$r: \begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0 \leftarrow \pi_1 \\ a_2x_2 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0 \leftarrow \pi_2 \end{cases}$$



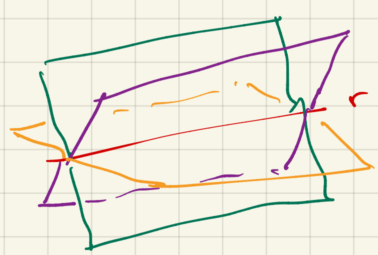
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1) + \beta(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2) = 0$$

(combinazione lineare delle due equazioni)

(equazione di un piano)
che contiene alla retta r

Al variare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ottengono infiniti piani. Tutti contengono alla retta r.



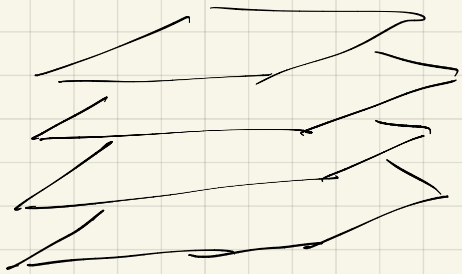
Fascio di piani di asse r

(o sostegno r)

(Fascio proprio)

* Caso particolare: se $(a_1, b_1, c_1) \parallel (a_2, b_2, c_2)$

$\pi_1 \parallel \pi_2 \Rightarrow$ Fascio improprio di piani paralleli a π_1



$$a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + \gamma = 0$$

$$\gamma \in \mathbb{R}$$