ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

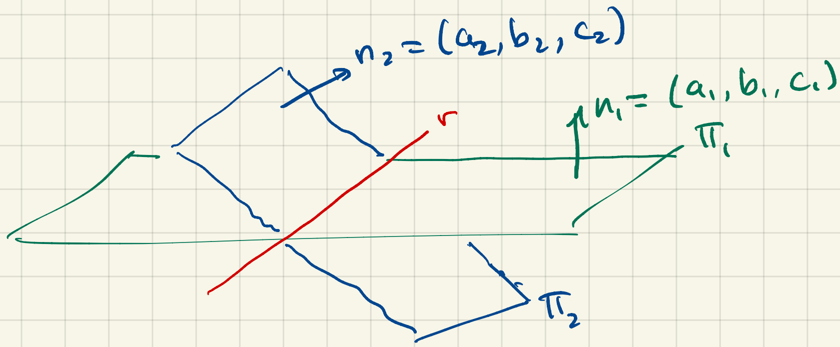
Lezioni 71-72, 13/01/2022

Prof. Luis García-Naranjo

FASCIO DI PIANI

In $\mathbb{E}^3$. Equazioni cartesiane di una retta r

$$r: \begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0 \leftarrow \pi_1 \\ a_2x_2 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0 \leftarrow \pi_2 \end{cases}$$



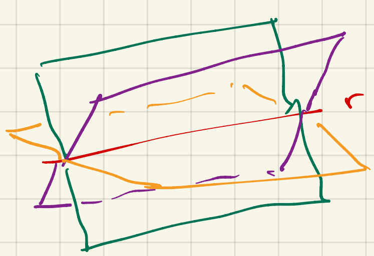
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1) + \beta(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2) = 0$$

(combinazione lineare delle due equazioni)

(equazione di un piano)
che contiene alla retta r

Al variare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ottengono infiniti piani. Tutti contengono alla retta r.



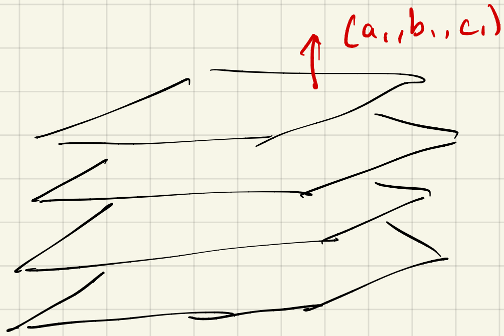
Fascio di piani di asse r

(o sostegno r)

(Fascio proprio)

* Caso particolare: se $(a_1, b_1, c_1) \parallel (a_2, b_2, c_2)$

$\pi_1 \parallel \pi_2 \Rightarrow$ Fascio improprio di piani paralleli a π_1



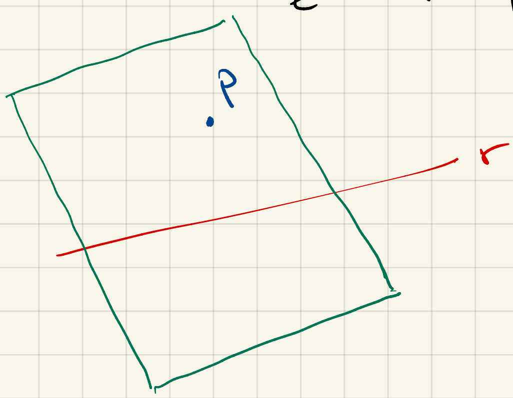
$$a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + \gamma = 0$$
$$\gamma \in \mathbb{R}$$

Es. In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ sia r la retta di eq.

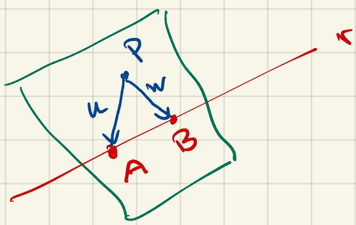
$$r: \begin{cases} 3x - y + z - 1 = 0 \\ x - 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$P = (3, 1, -2) \qquad P \notin r$$

Determinare l'equazione cartesiana del piano π che contiene la retta r e il punto P.



Senza usare fasci di piani



$$\pi: X = P + \lambda u + \mu w$$
$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

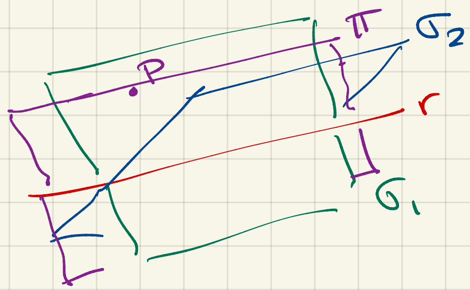
$$u = \overrightarrow{PA} = A - P$$
$$w = \overrightarrow{PB} = B - P$$

Per trovare l'eq. cartesiana di π bisogna eliminare i parametri λ e μ.

Usando i fasci di piani

$$r: \begin{cases} 3x - y + z - 1 = 0 & \sigma_1 \\ x - 3z + 2 = 0 & \sigma_2 \end{cases}$$

$$\underbrace{\alpha(3x - y + z - 1) + \beta(x - 3z + 2) = 0}_{\text{Fascio di piani di asse } r}$$



Dato che il piano π deve contenere il punto P, sostituendo le coord. di $P = (3, 1, -2)$ si trova

$$\alpha(3(3) - 1 - 2 - 1) + \beta(3 - 3(-2) + 2) = 0$$

$$5\alpha + 11\beta = 0$$

$$\alpha = -\frac{11}{5}\beta$$

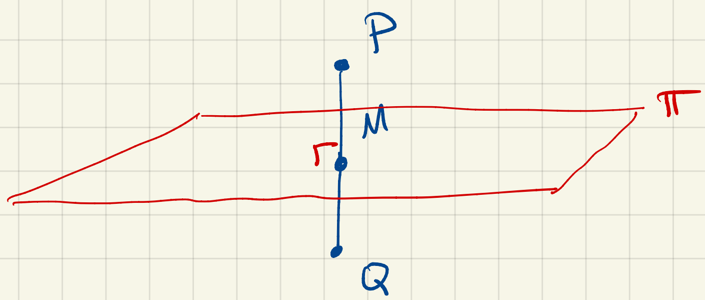
Posso porre $\beta = 5$, $\alpha = -11$

Sostituendo nell'equazione del fascio di piani:

$$\pi : \{ -11(3x - y + z - 1) + 5(x - 3z + 2) = 0$$

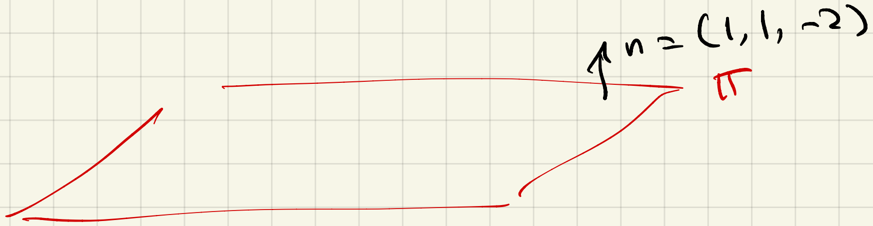
$$\boxed{\pi : \{ -28x + 11y - 26z + 21 = 0}$$

<u>Es.</u> In $\mathbb{E}^3$ trovare l'equazione del piano π passante per il punto medio del segmento PQ con $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e ortogonale alla retta per P e Q.



$\overrightarrow{PQ} = Q - P$ è ortogonale a π.

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$



Fascio improprio

$$\pi : x + y - 2z + \gamma = 0$$

Richiedo che $M \in \pi$.

M = Punto medio del segmento PQ

$$= P + \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ}) = P + \frac{1}{2}(Q-P)$$

(oppure $M = Q + \frac{1}{2}(\overrightarrow{QP}) = Q + \frac{1}{2}(P-Q)$)

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$$

Condizione di passaggio per M:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 + \gamma = 0$$

$$2 - 2 + \gamma = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 0}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi : x + y - 2z = 0}$$

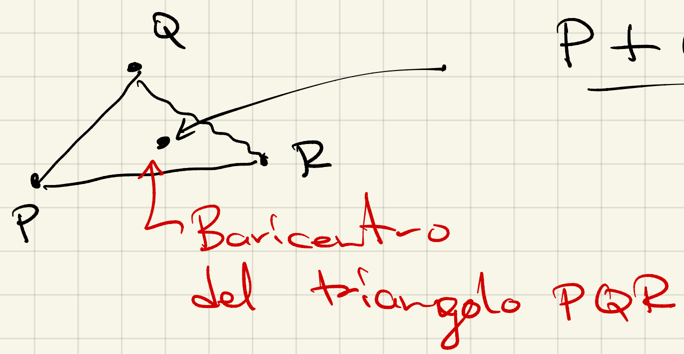
Punto medio tra P e Q

$$M = P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \underbrace{P}_{\text{punto}} + \underbrace{\frac{1}{2}(Q-P)}_{\text{vettore}} = \underbrace{\text{"}\frac{P+Q}{2}\text{"}}_{\text{Non ha senso logico.}}$$

Le coordinate di M sono la media aritmetica delle coordinate di P e Q.

Baricentro di un triangolo

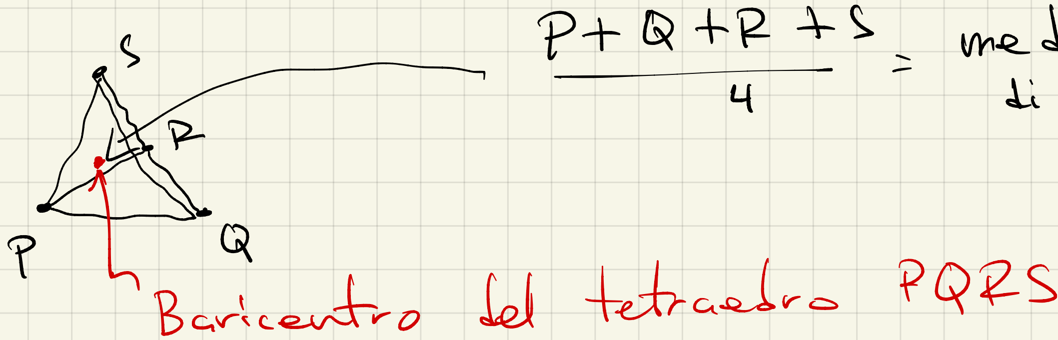
P, Q, R punti in $\mathbb{E}^n$



$$\frac{P+Q+R}{3} = \text{media aritmetica di } P, Q, R$$

Baricentro del tetraedro

P, Q, R, S punti in $\mathbb{E}^n$



$$\frac{P+Q+R+S}{4} = \text{media aritmetica di } P, Q, R, S$$

Prodotto vettoriale di due vettori

(Vale solo in $\mathbb{R}^3$)

$u = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$
$v = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$

Prodotto vettoriale di u e v:

vettore in $\mathbb{R}^3$

$$u \times v = (a_2 b_3 - a_3 b_2 , a_3 b_1 - a_1 b_3 , a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3$$

$$= \underbrace{\text{“} \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \text{”}}_{}$$

ha senso formale
non ha senso logico.

$w = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ il <u>prodotto misto</u> di

u, v, w è $\underbrace{(u \times v) \cdot w}_{\text{scalare}}$

Prodotto misto di u,v,w

$$(u \times v) \cdot w = w \cdot (u \times v) = c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$= \det \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} — & w & — \\ — & u & — \\ — & v & — \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} — & u & — \\ — & v & — \\ — & w & — \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} | & | & | \\ u & v & w \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Proprietà

1) $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \times v = \lambda_1 u_1 \times v + \lambda_2 u_2 \times v$

2) $u \times (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 u \times v_1 + \lambda_2 u \times v_2$

3) $u \times v = - v \times u$

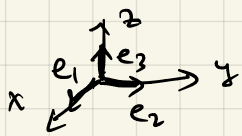
4) $u \times v = \vec{0}$ se e solo se $u // v$

5) $(u \times v) \cdot w = (w \times u) \cdot v = (v \times w) \cdot u$

6) Il vettore $u \times v$ è ortogonale a u e v.

<u>Dim.</u>

$$(u \times v) \cdot u \underset{\text{Per } 5)}{=} (u \times u) \cdot v \underset{\text{Per } 4)}{=} \vec{0} \cdot v = 0 \quad \blacksquare$$

7) 

$$e_1 \times e_2 = e_3$$

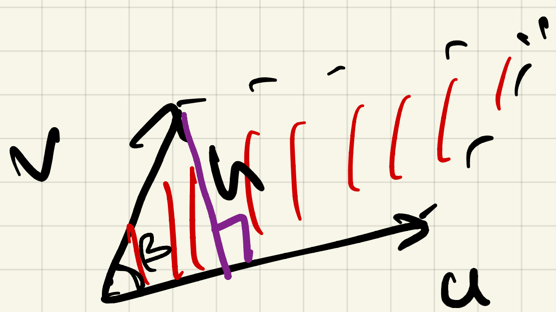
$$e_2 \times e_3 = e_1$$

$$e_3 \times e_1 = e_2$$

$(e_1 \times e_2) \cdot e_3 = e_3 \cdot e_3 = 1$

Date due basi ortonormali $\{b_1, b_2, b_3\}$ $\{c_1, c_2, c_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ esse sono equiorientate se $(b_1 \times b_2) \cdot b_3 = (c_1 \times c_2) \cdot c_3$

8) $\|u \times v\|$ è l'area del parallelogramma determinato da u, v.



Area = base x altezza
$= \|u\| h$
$= \|u\| \|v\| \sin \beta$

Dim.

$$\|u \times v\|^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

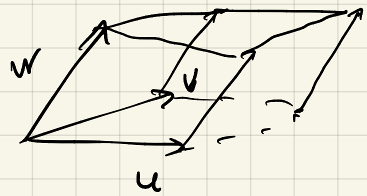
$$= \dots = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$

$$= \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2$$

$$= \|u\|^2 \|v\|^2 - (\|u\| \|v\| \cos \beta)^2$$

$$= \|u\|^2 \|v\|^2 (1 - \cos^2 \beta) = \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2 \beta = \text{Area}^2.$$

9) $|(u \times v) \cdot w|$ è il volume del parallelepipedo determinato da u, v, w.

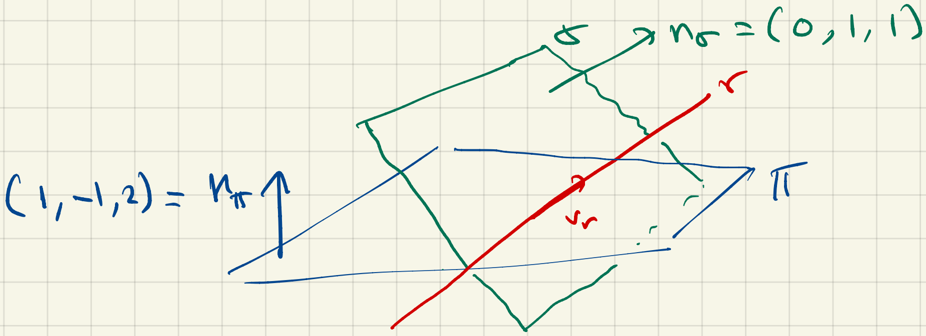


Es. Lezione di lunedì

$$r : \begin{cases} x - y + 2z = 0 & \pi \\ y + z = 0 & \sigma \end{cases}$$

Vettore direttore di r è $v_r = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calcolo in un altro modo.



v_r è ortogonale sia a n_π che a n_σ.

Posso calcolare

$$v_r = n_\pi \times n_\sigma = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

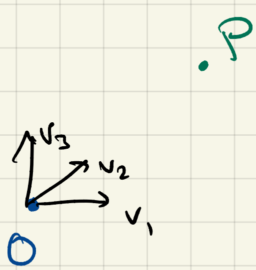
$$= \left(\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= (-3, -1, 1)$$

Sistema di riferimento in $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$

è costituito da : $\begin{cases} \text{un punto } O \in \mathbb{R}^n \text{ (origine)} \\ \text{una base } v_1, \dots, v_n \text{ di } \mathbb{R}^n \end{cases}$

denotato come $\Sigma = (O, v_1, \dots, v_n)$



Coordinate di P rispetto a Σ :

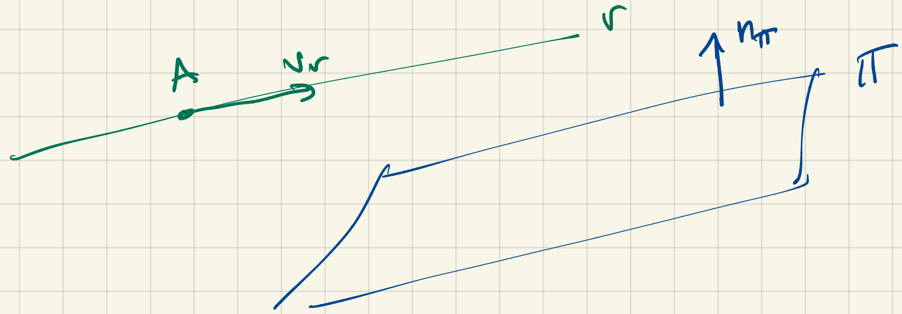
$$P = \underbrace{O}_{\text{origine}} + \underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n}_{\substack{\in \mathbb{R}^n \\ \text{vettore}}}$$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sono le coordinate di P.

Noi abbiamo lavorato sempre con

$$\Sigma = (\underbrace{(0, \dots, 0)}_{O}, \underbrace{e_1, \dots, e_n}_{\text{base canonica.}})$$

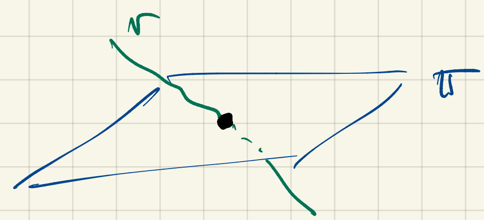
Distanza tra una retta ed un piano in E^3



Due possibilità:

1. $v_r \cdot n_\pi \neq 0 \Rightarrow r$ e π non sono paralleli.

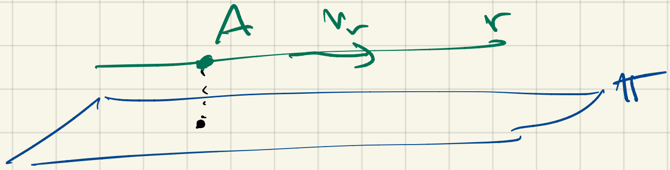
$$r \cap \pi \neq \phi$$
$$\Rightarrow d(r, \pi) = 0$$



(Se $v_r \times n_\pi = \vec{0} \Rightarrow v_r \,//\, n_\pi \Rightarrow r$ è ortogonale a π)

2. $v_r \cdot n_\pi = 0 \Rightarrow r$ e π sono paralleli

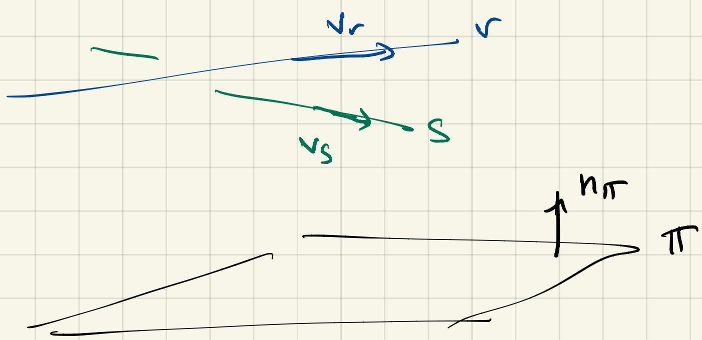
$$d(r, \pi) = d(A, \pi)$$ con $A \in r$.



Es 3. Gennaio 2020

$$r: \begin{cases} x + z = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad s: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

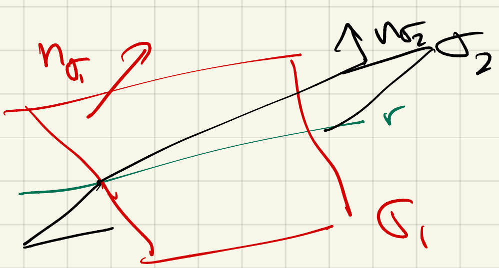
5.- Determinare un piano parallelo a r ed a s avente distanza 3 dal punto $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$



n_π è ortogonale sia a v_s che a v_r.

$v_s = (0, 1, 1).$

$$r: \begin{cases} x + z = 2 & \sigma_1 \\ x - y = 1 & \sigma_2 \end{cases}$$



$n_{\sigma_1} = (1, 0, 1)$

$n_{\sigma_2} = (1, -1, 0)$

$v_r = n_{\sigma_1} \times n_{\sigma_2}$

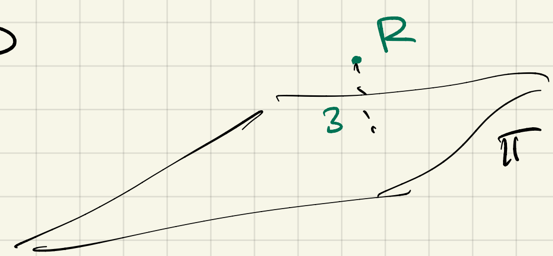
$$v_r = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (1, 1, -1)$$

$$n_\pi = v_r \times v_s = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (2, -1, 1)$$

$$\pi: \ 2x - y + z + \gamma = 0$$



$$d(\pi, R) = 3$$

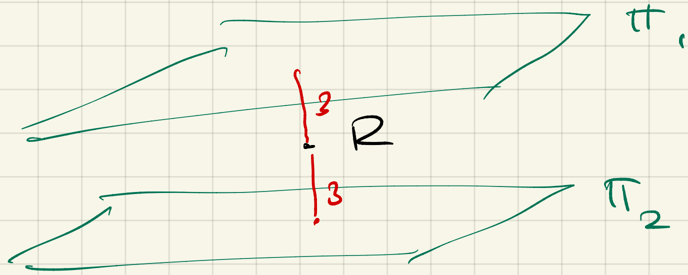
$$R = (1, 2, -1)$$

$$d(\pi, P) = \frac{|a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 + d|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$$d(\pi, R) = \frac{|2(1) - 2 + (-1) + \gamma|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|\gamma - 1|}{\sqrt{6}} = 3$$

$$|\gamma - 1| = 3\sqrt{6}$$

$$\gamma - 1 = \begin{cases} 3\sqrt{6} \\ -3\sqrt{6} \end{cases} \qquad \begin{aligned} \gamma_1 &= 1 + 3\sqrt{6} \\ \gamma_2 &= 1 - 3\sqrt{6} \end{aligned}$$



$$\pi_1 : 2x - y + z + 1 + 3\sqrt{6} = 0$$

$$\pi_2 : 2x - y + z + 1 - 3\sqrt{6} = 0$$