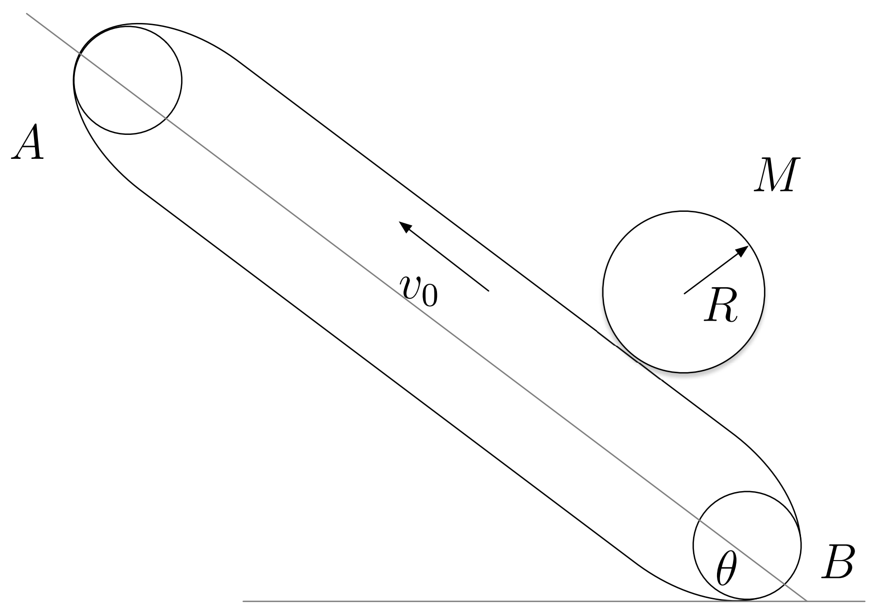
Compito 1 Febbraio 2022

1 Nastro trasportatore e ruota

Un nastro trasportatore è inclinato di un angolo $\theta = 37°$ rispetto all'orizzontale e scorre verso l'alto con velocità costante $v_0 = 1\,\mathrm{m/s}$. Una ruota di raggio $R = 36\,\mathrm{cm}$, con massa $M = 2.5\,\mathrm{kg}$ distribuita uniformemente lungo la sua circonferenza, è inizialmente ferma e viene deposta all'istante $t = 0$ sul nastro. Il coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.42$ è



sufficiente per permettere di instaurarsi un moto di puro rotolamento.

Si determini l'istante di tempo $\tilde{t}$ quando si instaura il moto di puro rotolamento.

La velocità del nastro viene mantenuta costante da un motore.

Si calcoli la potenza che questo deve sviluppare per mantenere costante la velocità del nastro durante l'intervallo di tempo $\tilde{t}$.

Si calcoli la velocità angolare $\tilde{\omega}$ della ruota quando il suo moto diventa di puro rotolamento.

Si calcoli la forza di attrito statico F_s che agisce durante il moto di puro rotolamento

Quale potenza deve sviluppare il motore dopo che si è instaurato il moto di puro rotolamento?

Si prenda positivo il verso di rotazione antiorario della ruota si prenda un asse z diretto nella direzione della velocità v_0 del nastro.

Soluzione Il momento di inerzia della ruota rispetto al baricentro è $I_g = MR^2 = 0.324\,\mathrm{kgm}^2$.

L'attrito sulla ruota ha direzione opposta alla velocità relativa del punto di contatto P rispetto al nastro: questa è $-v_0$ all'inizio e sarà nulla quando inizia il moto di puro rotolamento. Nella prima parte del problema le equazioni cardinali della dinamica per il moto del centro di massa sono

$$\begin{aligned} Ma_g &= Mg\left(\mu_d \cos\theta - \sin\theta\right) \\ I_g\dot{\omega} &= -MgR\mu_d\cos\theta \end{aligned}$$

dove $\omega(t)$ è la velocità angolare della ruota. Integrando queste si ottiene

$$\begin{aligned} v_g(t) &= g\left(\mu_d\cos\theta - \sin\theta\right)t \\ R\omega(t) &= -\left(\mu_d g\cos\theta\right)t \end{aligned}$$

La velocità del punto di contatto v_P è

$$v_g = v_P + R\omega(t)$$

La fase di strisciamento termina per $v_P = v_0$, cioè all'istante

$$\tilde{t} = \frac{v_0}{g\left(2\mu_d\cos\theta - \sin\theta\right)} = 1.48\,\mathrm{s}$$

$$\tilde{\omega} = -\frac{\mu_d g\cos\theta}{R}\tilde{t} = -13.5\,\mathrm{rad/s}$$

Poiché l'energia del nastro resta costante, il motore compensa il lavoro esercitato dall'attrito sul nastro

$$W_{\mathrm{att}} = -\left(\mu_d g\cos\theta\right)v_0 \quad \Rightarrow \quad W_{\mathrm{mot}} = -W_{\mathrm{att}} = \left(\mu_d g\cos\theta\right)v_0 = 3.29\,\mathrm{W}$$

Dal momento in cui il moto si trasforma in puro rotolamento, interviene l'attrito statico e non più quello dinamico, perché il punto d contatto è istantaneamente fermo. Le nuove equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} Ma_g &= F_s - Mg\sin\theta \\ I_g\dot{\omega} &= -RF_s \end{aligned}$$

Poi

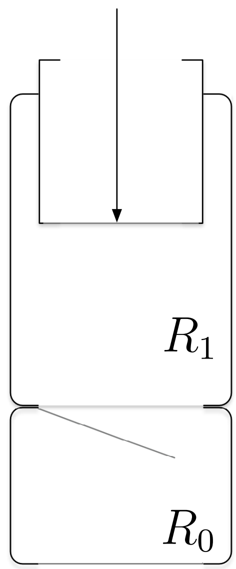
$$v_g = v_0 + R\omega \Rightarrow a_g = R\dot{\omega} \Rightarrow a_g = -\frac{1}{2}g\sin\theta \Rightarrow F_s = \frac{1}{2}Mg\sin\theta = 7.38\,\mathrm{N}$$

Il motore deve compensare il lavoro della forza di attrito statico esercitato sul nastro

$$W_{\mathrm{mot}} = F_s v_0 = \frac{1}{2}Mg\sin\theta v_0 = 7.38\,\mathrm{W}$$

2 Compressione di un gas

In un ambiente di aria a pressione $p_0 = 1$ atm e temperatura $T_0 = 305\,\mathrm{K}$ si vuol comprimere aria in un recipiente R_0 di volume $V_0 = 25\,\mathrm{lt}$ fino raggiungere la pressione $p = 10p_0$. Per far ciò, R_0 viene messo in comunicazione con una pompa costituita da un recipiente R_1 di volume V opportuno munito di pistone mobile. L'aria a pressione atmosferica contenuta nel volume $R_0 + R_1$ viene compressa in maniera isoterma nel volume R_0. Si calcolino il



volume V di R_1 e il numero di moli n_1 che vengono compresse nel volume V_0.

La compressione isoterma è svolta molto lentamente e gli attriti sono trascurabili. Quanto vale il lavoro richiesto L per effettuare la compressione?

Si calcoli il valore della variazione di entropia ΔS dell'aria che è stata compressa.

Se si ha, invece, a disposizione una pompa in cui il recipiente R_1 ha volume pari a $V_2 = V/2$, si deve procedere in due tempi: prima, l'aria a pressione atmosferica contenuta in $R_0 + R_1$ viene compressa in R_0. Questo viene chiuso e R_1 viene nuovamente riempito di aria a pressione atmosferica e messo in comunicazione con R_0. Dopodiché, l'aria ora contenuta in $R_0 + R_1$ viene compressa in R_0.

Si calcolino il numero di moli compresse nella prima fase n_x e il lavoro complessivo svolto sul gas nelle due fasi L'.

Si calcoli la variazione di entropia del gas in questa seconda trasformazione $\Delta S'$.

La seconda trasformazione è reversibile? Perché?

Soluzione

$$p_0\,(V + V_0) = 10p_0V_0 \quad \Rightarrow \quad V = 9V_0 = 225\,\mathrm{lt}$$

$$n = 10\frac{p_0 V_0}{RT_0} \approx 9.989$$

$$L = nRT_0 \ln \frac{V + V_0}{V_0} = 58.33\,\mathrm{kJ}$$

$$Q = -L \quad \Rightarrow \quad \Delta S = -\frac{L}{T_0} = -191.2\,\mathrm{J/K}$$

Seconda parte del problema Prima compressione: $V_2 = V/2 = 112.5\,\mathrm{lt}$. p_x sia la pressione in V_0 dopo la prima compressione.

$$p_0\,(V_2 + V_0) = p_x V_0 \quad \Rightarrow \quad p_x = 5.5 p_0 \quad \Rightarrow \quad n_x = 5.497\,\mathrm{moli}$$

Lavoro:

$$L_1 = n_x RT_0 \ln\left(1 + \frac{V_2}{V_0}\right) = 23.751\,\mathrm{kJ}$$

Seconda compressione: vengono compresse n moli

$$L_2 = nRT_0 \ln\left(1 + \frac{V_2}{V_0}\right) = 43.183\,\mathrm{kJ}$$

per un lavoro complessivo

$$L = L_1 + L_2 = 66.943\,\mathrm{kJ}$$

Siccome lo stato finale ed iniziale del gas in questo secondo processo sono gli stessi, l'entropia, che è una funzione di stato, resta la stessa

$$\Delta S' = \Delta S = -191.2\,\mathrm{J/K}$$

La seconda trasformazione non è reversibile, perché vi è una fase in cui il gas in V_0 si espande in V_2 dove la pressione è sempre minore che in V_0.

3 Galassia

Nelle ipotesi che

1) la Terra ruoti intorno al Sole su un'orbita circolare di raggio $R = 1.5 \times 10^8\,\mathrm{km} = 1\mathrm{UA}$ (unità astronomica) con periodo $T = 3 \times 10^7\,\mathrm{s}$;

2) il Sole ruoti attorno al centro della Galassia su un'orbita circolare di raggio $D = 2 \times 10^9\,\mathrm{UA}$ con velocità $v_S = 250\,\mathrm{km/s}$;

3) tutta la materia della Galassia sia interna all'orbita solare con distribuzione uniforme.

si calcolino:

1- il rapporto M_G/M_S tra la massa della Galassia e quella del Sole;

2- nell'ulteriore ipotesi che le stelle della Galassia abbiano in media massa uguale a quella del Sole, si stimi la distanza media $\langle d \rangle$ fra le stelle.

Soluzione Siccome le orbite sono circolari;

$$v_S^2 = \frac{\gamma M_G}{D} \qquad v_T^2 = \frac{\gamma M_s}{R} = \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2$$

da cui

$$\alpha = \frac{M_G}{M_S} = \frac{D V_S^2}{R v_T^2} = \frac{D}{R}\left(\frac{v_S T}{2\pi R}\right)^2 = 1.267 \times 10^{12}$$

α è anche uguale al numero di stelle nella Galassia.

Siccome la massa è distribuita in maniera uniforme dentro una sfera di raggio uguale al raggio dell'orbita del Sole

$$\langle d \rangle = \frac{\left(\frac{4\pi D^3}{3\alpha}\right)^{1/3}}{R} = 3 \times 10^6\,\mathrm{UA}$$