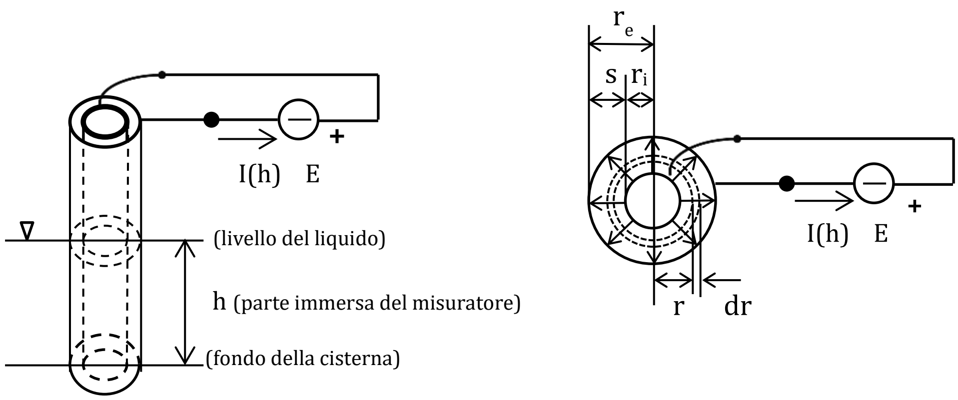
Capitolo 6 - Applicazioni

Qui svolgiamo alcuni approfondimenti dei concetti visti finora ed anche alcune estensioni, partendo da esempi (semplificati) di applicazioni pratiche.

6.1 Resistore cilindrico

Problema 6.1: *Un cisterna contenente un liquido con resistività elettrica ρ = 20 Ωm utilizza un misuratore di livello costituito dal* <u>*resistore cilindrico*</u> *schematizzato in figura, realizzato con due cilindri coassiali verticali di materiale metallico a bassa resistività rispetto a quella del liquido (p.e acciaio inossidabile).*
Il diametro del cilindro interno è pari a $2r_i$ = 3 cm   (r_i = raggio del cilindro interno)
La corona tra i due cilindri ha spessore s = 0.5 cm (quindi raggio esterno $r_e = r_i + s$ = 2 cm)
La lunghezza del misuratore è l = 1m.



Assumendo che la parte non immersa del resistore sia in aria, determinare come varia la corrente I(h) al variare del livello h del liquido fra 0 e 1000 mm (fare un grafico o calcolare per alcuni valori di h) quando il resistore è alimentato con una tensione E=12V.

La corrente I(h) sarà data dal rapporto E/R(h) ove R(h) è la resistenza elettrica che si manifesta fra i due terminale del resistore cilindrico, ossia fra il cilindro interno e quello esterno. Tale resistenza dipenderà dall'altezza *h* del liquido che sta fra i due cilindri. Dobbiamo quindi trovare l'espressione di questa resistenza.
L'andamento delle linee di corrente è mostrato nella parte di destra della figura precedente che mostra il resistore cilindrico visto "dall'alto": esse vanno dal cilindro interno, collegato al polo positivo del generatore E, al cilindro esterno, collegato al polo negativo, secondo percorsi radiali, per tutta l'altezza *h*. Tutte le linee sono di lunghezza *s*, pari allo spessore della corona cilindrica. La sezione attraversata dalle linee di corrente è quella laterale di un cilindro e non è costante lungo il percorso: essa è piccola quando vicina al cilindro interno e maggiore quando vicina la cilindro esterno di maggiore diametro. Non possiamo pertanto applicare la formula della resistenza di un conduttore filiforme, non avendo un

valore univoco di sezione da impiegare[1]. Dobbiamo allora ricavare l'espressione della resistenza per un resistore cilindrico.

Dalla figura di destra riconosciamo che il resistore cilindrico può essere pensato come la serie di infiniti resistori di sezione S(r)=2πrh (superficie laterale di un cilindro di altezza h e raggio generico r) e di lunghezza infinitesima dr. La resistenza di questa "corteccia" cilindrica sarà allora

$$dR(r) = \rho \frac{dr}{2\pi \mathrm{rh}}$$

La resistenza di una serie di resistori si ottiene sommando le singole resistenze: in questo caso esse sono infine e di valore infinitesimo e la somma è quindi un integrale:

$$R = \int_{r_i}^{r_i+s} \rho \frac{dr}{2\pi \mathrm{rh}} = \rho \frac{1}{2\pi \mathrm{h}} \int_{r_i}^{r_i+s} \frac{dr}{\mathrm{r}} = \frac{\rho}{2\pi \mathrm{h}} ln(\frac{r_i+s}{r_i})$$

In definitiva abbiamo

$$\boxed{R = \frac{\rho}{2\pi \mathrm{h}} ln(\frac{r_e}{r_i}) \qquad \textit{resistenza di un resistore cilindrico}}$$

Applicata al nostro problema otteniamo

$$R(h) = \frac{\rho}{2\pi \mathrm{h}} ln(\frac{r_e}{r_i}) \;\; = \frac{20}{2\pi \mathrm{h}} ln(\frac{2 \cdot 10^{-2}}{1.5 \cdot 10^{-2}}) = 0.9157 \; \frac{1}{h_{[m]}}$$

e la corrente è quindi, in generale

$$I(h) = \frac{E}{R(h)} \; = \; \frac{E \cdot 2\pi \mathrm{h}}{\rho \cdot ln(\frac{r_e}{r_i})}$$

cioè cresce proporzionalmente con l'altezza h del liquido. Nel nostro caso specifico

$$I(h) = \frac{E}{R(h)} \; = \; \frac{12 \cdot \mathrm{h}}{0.9157} = 13.10 \; h_{[m]}$$

La misura della corrente con un amperometro ci consente quindi di risalire all'altezza *h* del liquido.

NB – il coefficiente di proporzionalità fra corrente del circuito e altezza del liquido (13.10 nel nostro caso) dipende dalla fem E del generatore e dalla resistività ρ del liquido, che potrebbero non essere note con precisione o variare nel tempo e quindi, senza l'aggiustamento del coefficiente, la misura ne risulterebbe compromessa.

Per evitare questo inconveniente possiamo immaginare di sdraiare sul fondo del serbatoio (quindi sempre immerso nel liquido) un secondo resistore cilindrico con gli stessi raggi del precedente e altezza $h=h_{rif}$ nota, che prenderemo di riferimento. Se alimentiamo anche questo secondo resistore cilindrico con lo stesso generatore di tensione, la corrente che lo percorre sarà

$$I_{rif} = \frac{E}{R(h_{rif})} \; = \; \frac{E \cdot 2\pi \mathrm{h}_{rif}}{\rho \cdot ln(\frac{r_e}{r_i})}$$

Il rapporto delle due correnti è pertanto:

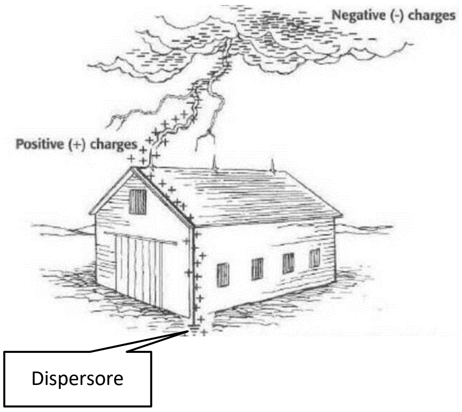
[1] Se lo spessore *s* della corona cilindrica è piccolo, un procedimento approssimativo potrebbe essere quello di usare la sezione media. Si invita a fare il calcolo e confrontare il risultato con quello calcolato con la formula esatta.

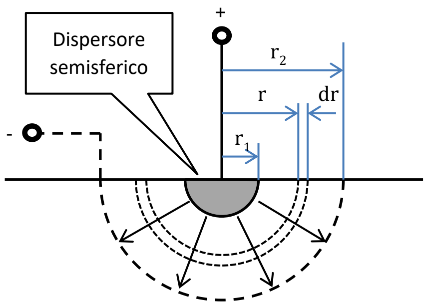
$$\frac{I(h)}{I_{rif}}=\frac{\dfrac{E\cdot 2\pi \mathrm{h}}{\rho\cdot ln(\frac{r_e}{r_i})}}{\dfrac{E\cdot 2\pi \mathrm{h}_{rif}}{\rho\cdot ln(\frac{r_e}{r_i})}}=\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{h}_{rif}}$$

cioè pari al rapporto dell'altezza da misurare rispetto a quella di riferimento, indipendentemente dalla fem e dalla resistività.

6.2 Resistore semisferico e sferico

Problema 6.2: *Per collegare a terra un impianto parafulmine di un edificio, si utilizza un dispersore semisferico, come rappresentato in figura. Si chiede di stimare la* <u>*resistenza di terra*</u> *del dispersore in esame assumendo che abbia un diametro di $2r_1 = 1$ m e la resistività del terreno sia di $\rho=100\ \Omega$m.*





I resistori possono avere diverse configurazioni geometriche e per alcune di esse (quelle che godono di particolari simmetrie geometriche) esistono formule precise per il calcolo della loro resistenza. Per altre geometrie possono esistere, nei manuali, formule approssimate o empiriche. Nei Capitoli e problemi precedenti abbiamo visto la formula per la resistenza di un resistore (conduttore) filiforme e quella per un resistore cilindrico (Problema 6.1). Questo problema ci offre l'opportunità di studiare il <u>resistore semisferico</u> i cui risultati estenderemo poi al <u>resistore sferico</u>.

Ma prima qualche nota sui *fulmini* e sui *parafulmini*. Durante le perturbazioni atmosferiche con trascinamento delle nubi, può succedere che si crei per strofinio (come quando si strofina una bacchetta di plastica su una pezza di lana) una separazione di cariche, per esempio positive sul terreno e negative sulla nube. Siamo quindi in presenza di due corpi carichi elettricamente, con cariche opposte, affacciati uno rispetto all'altro. Fra i due, terreno e nube, viene a crearsi, come visto nel Capitolo 2, un campo elettrico coulombiano e sotto l'effetto di tale campo elettrico gli ioni positivi presenti nell'aria sono trascinati verso la nube mentre quelli negativi verso il terreno. Il movimento degli ioni, se caratterizzato da velocità sufficientemente alte (campo elettrico intenso) può creare ulteriori ioni per urto con gli atomi e le molecole che incontrano. In definitiva si può creare un canale ionizzato, che è una specie di conduttore, che collega la nube col terreno e quando ciò si manifesta si ha un impetuoso movimento delle cariche negative della nube verso il terreno carico positivamente e di quelle positive del terreno verso la nube. Si manifesta cioè un'improvvisa e intensa corrente di scarica dei due corpi, di milioni di Ampere, che rappresenta appunto il fulmine, che, per l'effetto Joule che lo

accompagna, può essere distruttivo. Il punto di contatto sul terreno si trova spesso su oggetti elevati ed appuntiti (alberi, campanili ecc), ma può essere qualsiasi (ci sono fulmini anche in mezzo al mare).
Il parafulmine (che si potrebbe chiamare "cattura-fulmine"), il relativo *conduttore di calata* e il *dispersore di terra* costituiscono un percorso preferenziale, predisposto, per il fulmine nell'ultimo tratto vicino al terreno, proteggendo edifici o installazioni dall'essere attraversati dalla corrente di scarica citata.
I dispersori di terra sono realizzati in vari modi: paletti, piastre, reti, funi, ecc. e per ciascuna configurazione si hanno, nei manuali, formule semiempiriche per la stima della resistenza elettrica che presentano. La configurazione proposta dal Problema è quella semisferica, mostrata nella figura di destra.
Prima di considerare tale struttura come dispersore di terra, vediamola come *resistore semisferico*. Esso è costituito dalle due semisfere conduttrici (di resistività trascurabile rispetto al mezzo interposto) concentriche, una di raggio r_1 e l'altra di raggio r_2 fra le quali è interposto un mezzo conduttore di resistività uniforme ρ. Se, per esempio, applichiamo una tensione positiva fra la sfera interna e quella esterna, si manifesterà una corrente e il rapporto tensione/corrente costituisce la resistenza del nostro resistore semicilindrico.
L'andamento delle linee di corrente è mostrato nella parte di destra della figura precedente: esse vanno dalla semisfera interna, collegato al polo assunto positivo, alla semisfera esterna, collegato al polo negativo, secondo percorsi radiali, per tutto il volume semisferico del resistore. Tutte le linee sono di lunghezza r_2-r_1, pari allo spessore della corona semisferica. La sezione attraversata dalle linee di corrente è quella di una semisfera e non è costante: essa è piccola quando vicina alla semisfera interna e maggiore quando vicina a quella esterna di diametro maggiore. Non possiamo pertanto applicare la formula della resistenza di un conduttore filiforme, non avendo un valore univoco di sezione da impiegare[2]. Dobbiamo allora ricavare l'<u>espressione della resistenza per un resistore semisferico</u>.
Dalla figura di destra riconosciamo che il resistore semisferico può essere pensato come la serie di infiniti resistori di sezione $S(r)=2\pi r^2$ (superficie di una semisfera di raggio generico r) e di lunghezza infinitesima dr. La resistenza di questa "corteccia" semisferica sarà allora

$$dR(r) = \rho \frac{dr}{2\pi r^2}$$

La resistenza di una serie di resistori si ottiene sommando le singole resistenze: in questo caso esse sono infine e di valore infinitesimo e la somma è quindi un integrale:

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \rho \frac{dr}{2\pi r^2} = \rho \frac{1}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

In definitiva abbiamo

$$\boxed{R = \frac{\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad \textit{resistenza di un resistore semisferico}}$$

Possiamo estendere l'espressione al resistore sferico (costituito da due sfere concentriche, quella interna raggiunta da un terminale isolato che attraversa quella esterna e il mezzo interposto nella corona sferica) osservando che esso è assimilabile al parallelo di due resistori semisferici combacianti. Siccome la resistenza equivalente di due resistenze R identiche in parallelo è pari a R/2 ne risulta:

[2] Se lo spessore della corona semisferica è piccolo, un procedimento approssimativo potrebbe essere quello di usare la sezione media. Si invita a fare il calcolo e confrontare il risultato con quello calcolato con la formula esatta.

$$R = \frac{\rho}{4\pi}\ (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}) \qquad resistenza\ di\ un\ resistore\ sferico$$

Torniamo al nostro dispersore semisferico. Lo possiamo assimilare and un resistore semisferico il cui raggio esterno è molto grande, al limite $r_2=\infty$. Allora otteniamo dalla formula della resistenza di un resistore semisferico calcolata per $r_2=\infty$:

$$R = \frac{\rho}{2\pi}\ (\frac{1}{r_1}) \qquad resistenza\ di\ un\ dispersore\ di\ terra\ semisferico$$

Con i dati del problema risulta:

$$R = \frac{\rho}{2\pi}\ (\frac{1}{r_1}) = \frac{100}{2\pi}\ (\frac{1}{0.5}) = 31.83 \quad \Omega$$

NB: la resistività del terreno dipende molto dal tipo di materiale che lo compone. La tabella seguente è contenuta in una delle norme CEI

Tabella J.1 - Resistività del terreno per correnti alternate (Gamma dei valori che sono stati misurati frequentemente

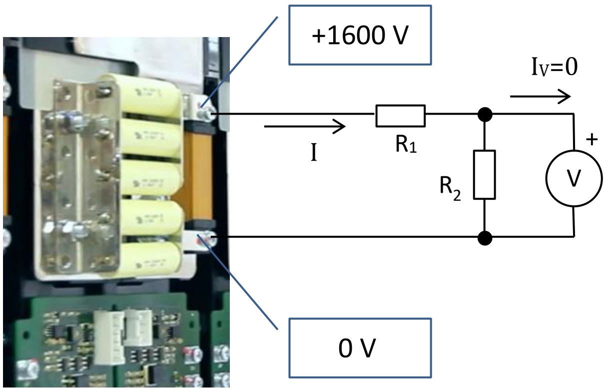
Tipo di terreno	Resistività del terreno ρ_E Ωm			
Terreno paludoso	da	5	a	40
Terriccio, argilla, humus	da	20	a	200
Sabbia	da	200	a	2 500
Ghiaietto	da	2 000	a	3 000
Pietrisco	Per lo più sotto			1 000
Arenaria	da	2 000	a	3 000
Granito			fino a	50 000
Morena			fino a	30 000

6.3 Dimensionamento di un partitore di tensione

Problema 6.3: *Un'apparecchiatura elettronica di potenza contiene uno stadio in Corrente Continua (in inglese Direct Current: DC) fra le cui barre c'è una tensione di circa V_{DC} = 1600V (nella foto del collage sottostante si vede un dettaglio di un convertitore elettronico di potenza continua/alternata impiegato per trasferire nella rete in Media Tensione l'energia di un impianto fotovoltaico o eolico; questi convertitori di potenza sono noti come Active Front End (AFE) converters). Per scopi di monitoraggio dell'impianto, si vuole misurare questa tensione, disponendo di un voltmetro, supposto ideale, (o di un sistema elettronico di acquisizione della tensione) con portata massima di 15 V.*
Allo scopo di ridurre la tensione dell'impianto al livello misurabile si impiega un partitore di tensione come schematizzato in figura. Imponendo anche che la potenza dissipata sul partitore non superi 4 W, calcolare i valori e le potenze delle resistenze R_1 e R_2.

Il voltmetro ideale non assorbe corrente (I_V =0). Allora le due resistenze R_1 e R_2 risultano di fatto in serie per una resistenza totale $R_{tot} = R_1 + R_2$. Possiamo allora calcolare la potenza assorbita dalle due resistenze e dissipata per effetto Joule con la

$$P = \frac{V_{DC}^2}{R_{tot}} \leq 4\,W$$



Da questa condizione otteniamo che deve essere

$$R_{tot} = R_1 + R_2 \geq \frac{V_{DC}^2}{4} = 640\ 10^3\ \Omega$$

Dobbiamo poi soddisfare le esigenze della misura di tensione. La tensione V_V sul voltmetro la possiamo calcolare con la formula del partitore di tensione e otteniamo

$$V_V = V_{DC} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \leq 15\,V \ \ con\,V_{DC} = 1600\,V$$

Assumiamo allora una R_{tot} = 640 10^3 Ω (cioè una potenza dissipa di 4 W) e una tensione V_V di 12,8 V quando $V_{DC} = 1600\,V$, cioè un fattore di misura pari a 125 fra la tensione vera e quella indicata dal voltmetro (manteniamo 2.2 V di margine di sicurezza rispetto alla massima tensione sopportata dal voltmetro). Allora il sistema da soddisfare sarà:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 640\ 10^3 \\ R_2 = 12.8\,(R_1 + R_2)/1600 \end{cases}$$

che porta ai valori

R_2 = 5.12 10^3 Ω = 5.12 kΩ
R_1 = 634.9 10^3 Ω = 634.9 kΩ

La potenza dissipata dalle resistenze sarà in totale di 4 W (come imposto) ripartita sulle due resistenze in proporzione del loro valore, visto che sono percorse dalla stessa corrente. Esattamente, P_{R1} = 3.968 W ≅ 4 W, P_{R2} = 0.032 W.

La corrente che percorre il partitore la valutiamo facilmente nota la potenza dissipata a 1600 V:

$$I = \frac{P}{V_{DC}} = \frac{4}{1600} = 0.0025\ A \equiv 2.5\ mA$$

NB: Le resistenze che saranno impiegate per realizzare il partitore saranno resistenze commerciali di precisione, che tuttavia esistono solo per alcuni valori standard o normalizzati. I valori standard o normalizzati per i resistori sono stabiliti in base alla norma IEC 60063, che fissa delle tabelle da utilizzare a seconda della tolleranza (valide anche per i condensatori, vedi in seguito) e seguono la

legge di una progressione geometrica: ogni valore è pari al precedente moltiplicato per un dato fattore (detto: ragione della progressione geometrica). In base ad esse si può conoscere quali valori di resistori sono disponibili in commercio.
A seconda della tolleranza garantita, la norma IEC 60063 definisce diverse serie:

E6 con tolleranza 20%, ragione $\sqrt[6]{10} = 1.468$, 6 valori per ogni decade;
E12 con tolleranza 10%, ragione $\sqrt[12]{10} = 1.212$, 12 valori per ogni decade;
E24 con tolleranza 5%, ragione $\sqrt[24]{10} = 1.101$, 24 valori per ogni decade;
E48 con tolleranza 2%, ragione $\sqrt[48]{10} = 1.049$, 48 valori per ogni decade;
E96 con tolleranza 1%, ragione $\sqrt[96]{10} = 1.024$, 96 valori per ogni decade;
e infine la
E192 (la più precisa) con tolleranza 0,5%, ragione $\sqrt[192]{10} = 1.012$, 192 valori per ogni decade.

È da notare che la serie E192 è usata anche per resistori con tolleranza dello 0,25% e 0,1% .

Per esempio, la tabella E12 prevede, nella decade da 10 a 100 Ω resistori con i seguenti valori:

10
10*1.212 ≅ 12
10*1.212*1.212 ≅ 15
e poi, allo stesso modo
18, 22, 27, 33, 39, 47, 56, 68, 82, il successivo essendo 100 che è l'inizio della decade successiva.

È sufficiente moltiplicare questi valori per 0,1 1 10 100 1000 ecc. per ottenere i valori delle resistenze in commercio nelle varie decadi. Quindi, se il venditore dichiara di avere disponibile la serie E12, non avrà una resistenza da 1274 Ω, ma neanche da 1300 Ω o da 1400 Ω: esistono solo da 1200 Ω (1,212 x 1000) o 1500 Ω (1,212 x 1,212 x 1000).
Altro esempio. La serie E6 (per resistori con tolleranza del 20%) consente sei valori per decade: 10, 15, 22, 33, 47, 68. Questo significa che i valori di questa serie possono essere multipli di 10. Ad esempio valori che si trovano in commercio sono: 0,47 Ω, 4,7 Ω, 47 Ω, 470 Ω, 4,7 kΩ, 47 kΩ, 470 kΩ, e così via.

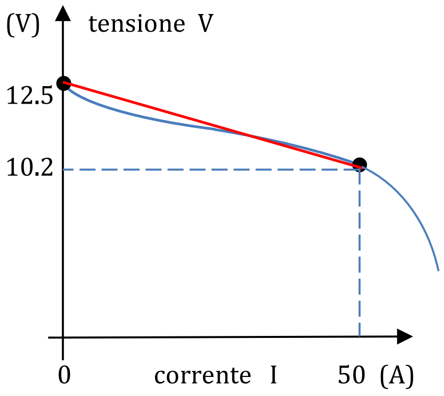
Le tabelle con i valori catalogati per le diverse serie si trovano facilmente in rete e nei manuali.

Per realizzare il nostro partitore useremo resistenze all'1% fra i cui valori standard si trova 5.11 kΩ e 634 kΩ, molto vicini ai valori desiderati. Se ciò non fosse successo si poteva provare a modificare le specifiche di potenza assorbita e/o di fattore di scala della misura per ottenere valori di resistenze vicini a quelli disponibili, oppure ottenere i valori desiderati con la combinazioni serie/parallelo di valori commerciali standard.

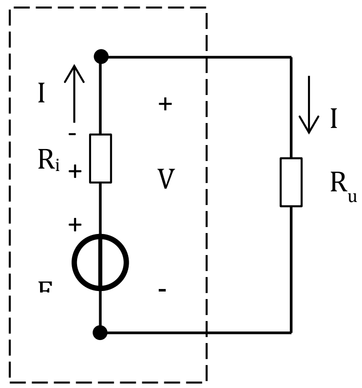
6.4 Generatore reale di tensione

Problema 6.4: *I dati di targa di un accumulatore precisano che esso presenta una tensione ai morsetti pari a V_o= 12,5 V a vuoto, cioè quando non eroga corrente, e una tensione di V=10.2 V quando eroga una corrente di 50 A. Trovare uno <u>schema elettrico equivalente</u> che rispetti le due condizioni operativa.*

Trovare infine la tensione ai morsetti, la corrente e la potenza erogate quando l'accumulatore è connesso ad un utilizzatore costituito da una resistenza R_u = 0.3 Ω.



Generatore reale di tensione



La tensione ai morsetti di un accumulatore o di una pila, a parità di condizioni di carica (e di temperatura) non resta costante al crescere della corrente erogata, ma diminuisce. Quindi la sua rappresentazione con un generatore ideale di tensione di data fem E, come fin qui fatto, è poco corretta.
Se si misura con un voltmetro la tensione ai morsetti di un accumulatore reale facendo crescere la corrente (per esempio collegandolo ad un resistore variabile di resistenza via via decrescente) da zero (a vuoto, senza carico elettrico collegato) fino ad un valore massimo ammesso dall'accumulatore, si misura la *tensione a vuoto* V_o quando la corrente è nulla e via via una tensione decrescente con il crescere della corrente. L'andamento non è in generale lineare: spesso c'è una diminuzione repentina a piccole correnti e poi più moderata per le correnti più alte e, infine, ancora repentina se si andasse a correnti superiori a quella massima ammessa. Un possibile andamento è mostrato in figura dalla curva blu, che va dal livello di 12,5 V a vuoto a 10.2 V a piena corrente di carico. L'andamento in quel campo delle correnti può essere con buona approssimazione linearizzato con la caratteristica rettilinea rossa, che è facilmente riproducibile con il circuito equivalente entro il tratteggio della figura di destra. Per esso vale infatti:

$$V = E - R_i I$$

I valori di E ad R_i li possiamo calcolare osservando che a vuoto (V= V_o, I=0) l'equazione sopra diventa:

$$V = V_o = E$$

che fornisce il valore di E, nel nostro caso E=12.5 V.
Per rispettare il punto di lavoro a carico con V=10.2 V e I=50 A deve valere:

$$V = 10.2 = E - R_i * 50 = 12.5 - R_i * 50$$

dalla quale ricaviamo:

$$R_i = \frac{12.5 - 10.2}{50} = 0.046\,\Omega$$

e abbiamo così trovato i parametri del *generatore reale di tensione*.

Possiamo ora risolvere la seconda parte del problema. Quando il generatore reale è chiuso su una resistenza da 0.3 Ω, si viene a creare il circuito con una sola maglia mostrato nella figura a destra, la cui corrente sarà

$$I = \frac{E}{R_i + R_u} = \frac{12.5}{0.046 + 0.3} = 36.13\,A$$

mentre la tensione ai morsetti la calcoliamo dall'equazione caratteristica del generatore reale o da quella del resistore di carico

$$V = E - R_i I = 12.5 - 0.046 * 36.13 = 10.84\,V$$

oppure

$$V = R_u I = 0.3 * 36.13 = 10.84\,V$$

Infine, il bilancio delle potenze. La potenza sul carico R_u sarà pari a quella erogata ai morsetti del generatore reale e risulta

$$P_u = VI = R_u I^2 = 10.84 * 36.13 = 391.6\text{ W}$$

Quella erogata dal generatore ideale di fem E è invece:

$$P_E = EI = 12.5 * 36.13 = 451.6\text{ W}$$

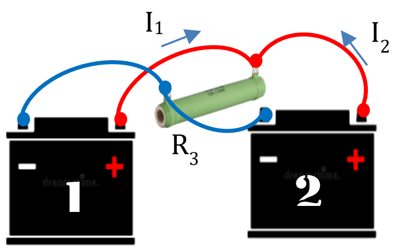
La differenza di 60 W è la potenza dissipata sulla resistenza interna R_i che vale infatti

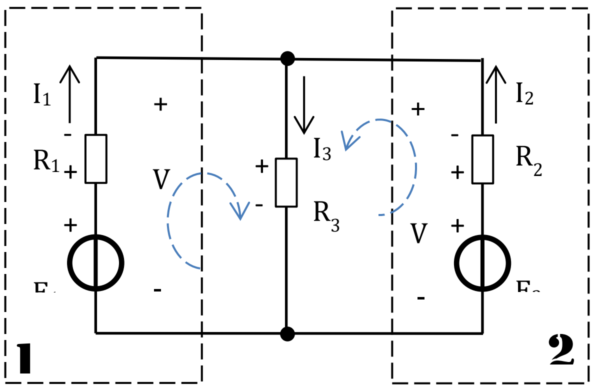
$$P_i = R_i I^2 = 0.046 * 36.13^2 = 60.05\text{ W}$$

La potenza P_i è quella che determina il riscaldamento dell'accumulatore reale durante il suo funzionamento.

6.5 Principio di sovrapposizione degli effetti

Problema 6.5: *Due generatori reali, rappresentativi per esempio di due batterie di accumulatori, alimentano, in parallelo, un comune carico elettrico come schematizzato nella figura seguente. Il primo generatore ha fem E_1 = 145 V e resistenza interna R_1 = 5 Ω; il secondo generatore ha fem E_2 = 148 V e resistenza interna R_2 = 4 Ω; il carico è costituito dalla resistenza R_3 = 10 Ω. Scegliendo la convenzione di segno dei generatori, sia per quelli ideali che per quelli reali, e la convenzione di segno dei carichi per i resistori, vogliamo calcolare le correnti erogate dai generatori e la corrente e tensione del carico. Infine, faremo un bilancio delle potenze.*





Il problema offre l'opportunità di riprendere i metodi di soluzione (trovare le tensioni e le correnti dati i parametri) dei circuiti elettrici. Il circuito elettrico da risolvere è quello di destra (che riproduce la struttura fisica di sinistra). Lo risolveremo in due modi diversi.

Lo risolveremo dapprima scrivendo le equazioni che derivano dai principi di Kirchhoff e dalle equazioni ai componenti (già fatto anche nel precedente Problema 5.1). Il circuito ha due nodi - e quindi scriveremo una sola equazione ai nodi con il principio di Kirchhoff per le correnti - e due maglie elementari (anelli), evidenziate in figura con frecce curvilinee che ne definiscono anche l'orientamento (l'orientamento è stato scelto a piacere) - quindi scriveremo due equazioni di bilancio delle tensioni con il principio di Kirchhoff per le tensioni.
Le equazioni sono allora, tenendo conto dei versi positivi delle grandezze:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ E_1 = V_{R1} + V_{R3} \\ E_2 = V_{R2} + V_{R3} \end{cases}$$

Sostituendo le equazioni tensione-corrente dei resistori ricaviamo infine

$$\begin{cases} 0 = I_1 + I_2 - I_3 \\ E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3 \\ E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3 \end{cases}$$

che è un sistema algebrico lineare di tre equazioni in tre incognite (le tre correnti). Se sostituiamo la corrente I_3 della prima equazione nelle successive due, esso si riduce a due sole equazioni in due incognite come segue

$$\begin{cases} E_1 = R_1 I_1 + R_3 (I_1 + I_2) \\ E_2 = R_2 I_2 + R_3 (I_1 + I_2) \end{cases}$$

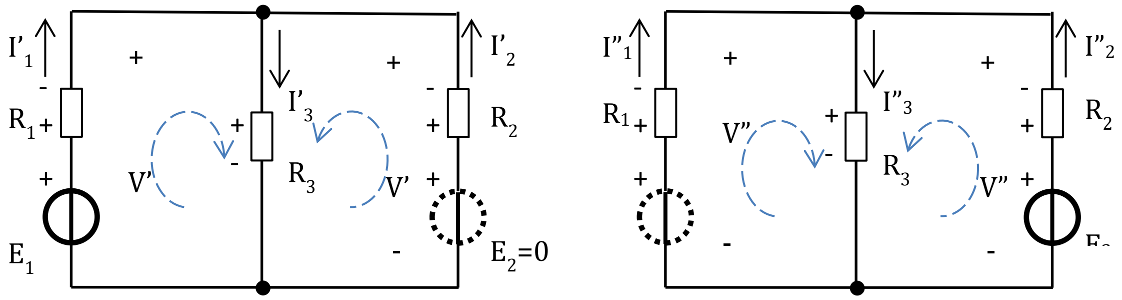
la cui soluzione è

$$\begin{cases} I_1 = 5\ A \\ I_2 = 7\ A \\ I_3 = 10\ A \end{cases}$$

Infine la tensione V fra i due nodi si calcola con la $V = V_{R3} = R_3 I_3 = 10*12 = 120$ V e, analogamente, le altre tensioni sulle resistenze.

NB – Si suggerisce di svolgere il bilancio delle potenze

Le equazioni sopra scritte formano sempre sistemi algebrici lineari la cui soluzione si può ottenere come somma delle soluzioni che si ricavano applicando uno dei termini noti alla volta. Tradotto alla soluzione dei circuiti lineari (a parametri costanti), questo si esprime dicendo che <u>le correnti e le tensioni</u> si possono ricavare applicando il *principio della sovrapposizione degli effetti* che consiste nel risolvere il circuito <u>applicando un generatore alla volta e sommando poi tutte le singole soluzioni</u>.



Si tratta in definitiva di risolvere i due circuiti sopra disegnati: il primo con il solo generatore di tensione E_1, mentre il secondo con il solo generatore E_2. Il generatore eliminato è sostituito con un generatore di fem nulla, cioè con un corto circuito (che è appunto un bipolo che assicura tensione nulla ai suoi capi qualsiasi sia la corrente che lo percorre). Conviene mantenere gli stessi versi positivi per le tensioni e le correnti nei due circuiti, al fine di semplificare la somma finale.

I due circuiti hanno la stessa configurazione di quello del Problema 5.1 al quale possiamo fare riferimento per la soluzione.

Applicando per esempio i principi di Kirchhoff ai due casi otteniamo (possiamo sfruttare le equazioni appena scritte per la soluzione generale):

Circuito con solo generatore E_1

$$\begin{cases} E_1 = R_1 I'_1 + R_3(I'_1 + I'_2) \\ 0 = R_2 I'_2 + R_3(I'_1 + I'_2) \end{cases}$$

la cui soluzione è:

$$\begin{cases} I'_1 = 18.46\ A \\ I'_2 = -13.18\ A \\ I'_3 = 5.276\ A \end{cases}$$

Circuito con solo generatore E_2

$$\begin{cases} 0 = R_1 I"_1 + R_3(I"_1 + I"_2) \\ E_2 = R_2 I"_2 + R_3(I"_1 + I"_2) \end{cases}$$

la cui soluzione è:

$$\begin{cases} I"_1 = -13.45\ A \\ I"_2 = 20.18\ A \\ I"_3 = 6.726\ A \end{cases}$$

In definitiva, tenendo conto dei versi positivi assunti per le correnti totali e per le singole componenti possiamo scrivere

$$\begin{cases} I_1 = I'_1 + I"_1 = 18.46 - 13.45 = 5\ A \\ I_2 = I'_2 + I"_2 = -13.18 + 20.18 = 7\ A \\ I_3 = I'_3 + I"_3 = 5.276 + 6.726\ A = 12\ A \end{cases}$$

valori che confermano le soluzioni precedenti.

Da ricordare che il principio di sovrapposizione degli effetti si applica per calcolare le tensioni e le correnti, ma non vale per le potenze. Le potenze totali non sono la somma delle potenze

<u>**calcolate sui singoli circuii con un generatore alla volta.**</u> Le potenze si calcolano pertanto solo dopo aver calcolato tensioni e correnti totali.
Per il bilancio delle potenze possiamo calcolare dapprima la totale potenza P_E erogata (convenzione di segno dei generatori) dai due generatori ideali:

$$P_E = E_1 I_1 + E_2 I_2 = 145 * 5 + 148 * 7 = 1761 \; W$$

e poi la totale potenza P_R assorbita (convenzione di segno dei carichi) dai tre resistori:

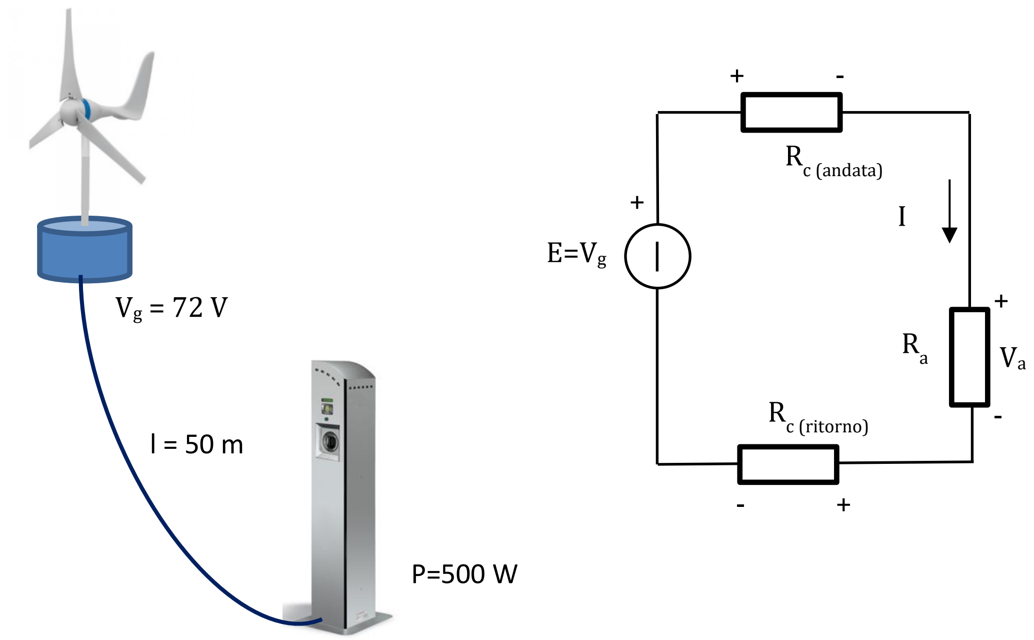
$$P_R = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 = 5 * 5^2 + 4 * 7^2 + 10 * 12^2 = 1761 \; W$$

che risulta ovviamente pari a quella totale erogata.

6.6 Dimensionamento di una linea in corrente continua

Problema 6.6: *Un piccolo generatore eolico con tensione di uscita V_g = 72 V, in corrente continua, deve alimentare un'apparecchiatura avente una potenza massima P=500 W e operante con tensione V_a= 72 V ±5%. L'apparecchiatura è situata ad una distanza l= 50 m dal generatore ed è collegata con un <u>cavo bipolare in rame</u>. Il collage sottostante illustra il sistema.*

Calcolare la sezione dei conduttori di rame del cavo per assicurare, alla massima potenza del carico, una caduta di tensione di linea (differenza fra tensione in partenza (lato generatore eolico) e tensione in arrivo (lato apparecchiatura)) non superiore al 4%.



Lo schema elettrico rappresentante la struttura fisica è mostrato a destra nella figura. Un generatore di tensione ideale rappresenta il generatore eolico con la sua regolazione elettronica della tensione che assicura i 72 V ad ogni corrente di uscita (entro i limiti accettabili di corrente). Il cavo bipolare è rappresentato con due identiche resistenze R_c, una per il conduttore di andata e l'altra per quello, identico, di ritorno. IL carico (apparecchiatura) è assimilato ad una resistenza R_a.

Possiamo prima di tutto calcolare la caduta di tensione massima ammessa:

$$\Delta V = V_g - V_a \leq 0.04 * 72 = 2.88\,V$$

che vuol dire che la tensione sul carico sarà non inferire a $V_a \geq 72 - 2.88 = 69.12$ V che rientra nell'intervallo delle tensioni accettabili.

Possiamo anche calcolare la corrente massima assorbita dall'apparecchiatura, cioè alla sua massima potenza dio esercizio:

$$I = \frac{P}{V_a} = \frac{500}{69.12} = 7.234\,A$$[3]

La caduta di tensione in linea è dovuta alla resistenza dei conduttori di andata e di ritorno. Per assicurare la caduta di tensione massima consentita deve valere allora:

$$\Delta V = 2R_c I \leq 2.88\,V$$

da cui

$$R_c \leq \frac{2.88}{2 \cdot I} = \frac{2.88}{2 * 7.234} = 0.199\,\Omega$$

Il valore massimo della resistenza dei conduttori del cavo ci consente di calcolare la loro sezione minima.

Dalla formula della resistenza di un conduttore si ottiene infatti

$$S = \frac{\rho l}{R_c} \geq \frac{0.018_{[\Omega mm^2/m]} * 50_{[m]}}{0.199_{[\Omega]}} = 4.523\,mm^2$$

I cavi elettrici presentano sezioni normalizzate. Valori commerciali in mm^2 sono:

1.0	1,5	2,5	4	6	10	16	25	35	50	70	95	120	150	185	240

[3] In calcoli di questo tipo, sarebbe anche lecito usare la corrente nominale pari alla potenza divisa per la tensione nominale 500/72= 6.94 A.

Siamo allora costretti a prendere un cavo bipolare da 6 mm².[4] Con questa sezione commerciale, la resistenza dei conduttori del cavo diventa

$$R_c = \frac{\rho l}{S} = \frac{0.018 * 50}{6} = 0.15\,\Omega$$

e quindi la caduta di tensione

$$\Delta V = 2R_c I = 2 * 0.15 * 7.234 = 2.17\,V$$

Per completare la progettazione si dovrebbe anche verificare che il cavo scelto abbia una portata superiore alla corrente I alla quale sarà sottoposto. La portata massima di un cavo è dettata da motivi termici (riscaldamento massimo per effetto Joule al passaggio della corrente) ed dipende dal materiale impiegato per l'isolamento (gomma, PVC, ecc), dalla tipologia di cavo (unipolare, bipolare, tripolare ecc) dalle condizioni di posa (all'aria, interrato, in canalina ecc) dalla temperatura ambiente ecc. La portata è indicata sui data sheet del cavo.

In questo caso si può con quasi certezza prevedere che sia il cavo da 4 mm² che, a maggior ragione, quello da 6 mm² sono in grado di sostenere ampiamente i 7-8 A richiesti.

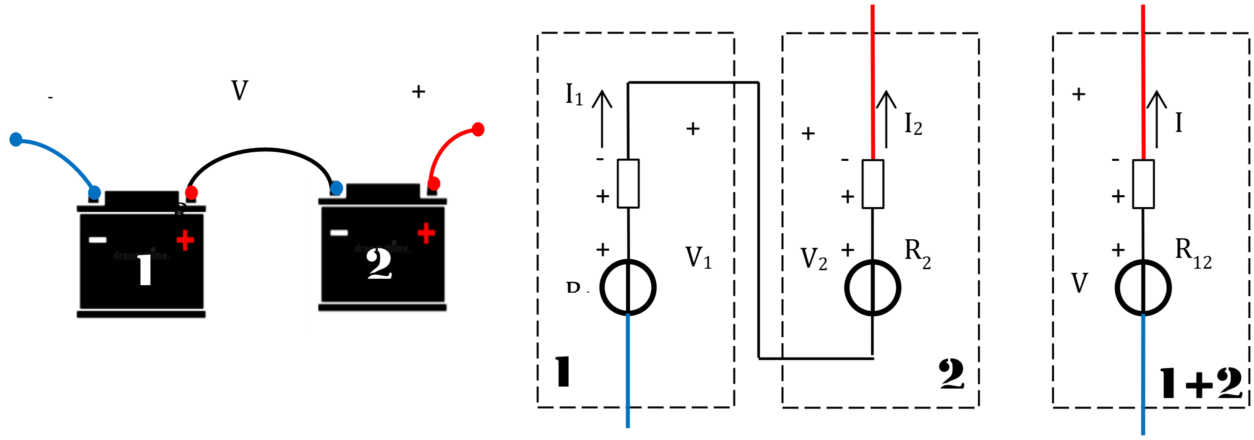
6.7 Accumulatori in serie

Problema 6.7: *Due accumulatori simili, ma di differente marca, hanno i seguenti dati di targa:*

Grandezza	*Accumulatore 1*	*Accumulatore 2*
Tensione a vuoto [V]: V_o	*12.0*	*12.5*
Corrente nominale [A]: I	*20*	*30*
Tensione alla corrente nominale [V]: V	*9.8*	*10.2*
Capacità nominale [Ah]: C	*100 (C_5)*	*240 (C_8)*
Potenza alla corrente nominale [W]: P	*196*	*306*
Energia accumulata [kWh]: En	*0.98*	*2.448*

I due accumulatori vengono posti in serie (concorde), come mostrato nella figura sottostante, per ottenerne uno di tensione ai morsetti più elevata.

[4] In una situazione pratica di questo tipo, ci si potrebbe chiedere se rinunciare al limite massimo di cdt del 4% e adottare un cavo da 4 mm², purché la tensione sul carico rientri comunque nei limiti di tolleranza ammessi del 72 V ±5%. Si invita a fare questa verifica.



Si chiede di stimare i parametri principali dell'accumulatore risultante.

Intanto iniziamo a comprendere e risolvere i parametri dei due singoli accumulatori. Per ciascuno di essi useremo lo schema equivalente del "generatore di tensione reale" visto nel Problema 6.4 a cui possiamo riferirci per alcuni dettagli di calcolo.

Come abbiamo visto in quel problema, la fem di ciascun generatore ideale coincide con la tensione a vuoto e pertanto avremo:

$$E_1 = V_{1o} = 12.0\ \text{V}$$

$$E_2 = V_{2o} = 12.5\ \text{V}$$

Le resistenze R_1 e R_2 sono le resistenze interne dei due accumulatori e danno giustificazione della diminuzione di tensione da vuoto a carico. Come ricavato per il problema 6.4, il valore di ciascuna di esse può essere ottenuto con la formula

$$R = \frac{V_o - V}{I}$$

ove V_o è la tensione a vuoto e V,I sono tensione e corrente nominali. Allora calcoliamo

$$R_1 = \frac{V_{1o} - V_1}{I_1} = \frac{12.0 - 9.8}{20} = 0.11\ \Omega$$

$$R_2 = \frac{V_{2o} - V_2}{I_2} = \frac{12.5 - 10.2}{30} = 0.0767\ \Omega$$

La *capacità* di un accumulatore è la quantità di carica (e quindi si dovrebbe misurare un Coulomb = Ampere*secondo, ma solitamente è data in Ampere*ora: Ah) che mediante i processi elettrochimici al suo interno esso è in grado di spostare da un morsetto all'altro a partire dal suo stato completamente carico (materiali chimici al suo interno totalmente predisposti per lo sviluppo dei processi elettrochimici) fino alla completa scarica (che corrisponde allo stato nel quale i processi elettrochimici si sono esauriti e si spengono). La capacità dipende principalmente dalla quantità di materiale chimicamente attivo è contenuta nell'accumulatore (che dipende dalle sue dimensioni), ma anche dalle condizioni con cui si esegue la scarica. Solitamente viene fornita facendo riferimento ad una scarica a corrente costante impostata per avere il processo di scarica in un prefissato numero di ore.

Per esempio l'accumulatore 1 ha una capacità di 100 Ah ed è siglata come C_5; vuol dire che è stata misurata producendo una scarica completa dell'accumulatore con una corrente costante in 5 ore e pertanto con una corrente di 100Ah/5h = 20 A, che è la corrente qui assunta come nominale.

Invece l'accumulatore 2 ha una capacità di 240 Ah (sarà di volume più grande, più che doppio) ed è siglata come C_8; vuol dire che è stata misurata producendo una scarica completa dell'accumulatore con una corrente costante in 8 ore e pertanto con una corrente di 240Ah/8h = 30 A, che è la corrente anche qui assunta come nominale.

Per scaricare l'accumulatore 2 in 5 ore si sarebbe dovuto usare una corrente constante per tutto il periodo di scarica pari a 240Ah/5h = 48 A. E' possibile però che con una scarica più rapida, e cioè con correnti maggiori, le razioni chimiche siano più "disordinate" ed in definitiva la totale carica che l'accumulatore sposta da un morsetto all'altro sia inferiore. In altre parole, sarà $C_{<5}<C_5<C_8<C_{>8}$ anche se le differenze potrebbero non essere eccessive per tempi di scarica non troppo diversi. In questo Problema assumiamo per semplicità che $C_5 \cong C_8$ pari a 100 Ah per l'accumulatore 1 e 240 Ah per l'accumulatore 2.

Infine, la potenza alla corrente nominale è semplicemente il prodotto della tensione per la corrente nominali e l'energia è il prodotto della capacità con la tensione nominale.

E veniamo all'accumulatore aggregato, ottenuto per serie dei due singoli accumulatori. Intanto sarà senz'altri $I_1 = I_2 = I$ (condizione del collegamento in serie). Il circuito elettrico equivalente e i versi positivi impostati ci consentono di scrivere:

$$V = E_1 - R_1 I + E_2 - R_2 I = (E_1 + E_2) - (R_1 + R_1) I$$

Ovvero vale il primo circuito elettrico equivalente a destra con

$$E_{12} = (E_1 + E_2) = \; 12 + 12.5 \; = 24.5 \, V$$

$$R_{12} \; = (R_1 + R_1) = \; 0.1867 \; \Omega$$

e così possiamo scrivere la prima riga della tabella sottostante che si riferisce alla combinazione degli accumulatori: tensione a vuoto = fem E_{12}.

Grandezza	*Accumulatore 1+2*
Tensione a vuoto [V] : V_o	*24.5*
Corrente nominale [A]: I	*20*
Tensione alla corrente nominale [V]: V	*20.77*
Capacità nominale [Ah]: C	*100 (C_5)*
Potenza alla corrente nominale [W]: P	*415.3*
Energia accumulata [kWh]:	*2.077*

Per quanto riguarda la corrente nominale, essa non potrà essere maggiore della più piccola delle due dei singoli accumulatori; nel caso specifico con una corrente di 20 A l'accumulatore 1 è percorso dalla sua corrente nominale, per la quale i suoi morsetti e collegamenti anche interni sono stati dimensionati, e non si potrà andare oltre, anche se l'accumulatore 2 ammetterebbe corrente maggiore. Quindi nella seconda riga della tabella sopra metteremo 20 A.

La tensione alla corrente nominale la calcoliamo dal bilancio delle tensioni sopra scritto:

$$V = (E_{12}) - (R_{12})I = 24.5 - 0.1867 * 20 = 20.77V$$

La potenza alla corrente nominale è il prodotto della tensione per la corrente:

$$P = VI = 20.77 * 20 = 415.3\, W$$

che non è la somma delle due potenze singole.

Infine se programmiamo una scarica con corrente nominale di 20 A, a partire da accumulatori completamente carichi, dopo 5 ore l'accumulatore 1 sarà completamente scarico e si dovrà cessare il processo di scarica (anche se l'accumulatore 2 ha ancora una carica residua non trascurabile).

La capacità dell'insieme dei due accumulatori in serie è pertanto la minore delle due singole e pari a 100 Ah.

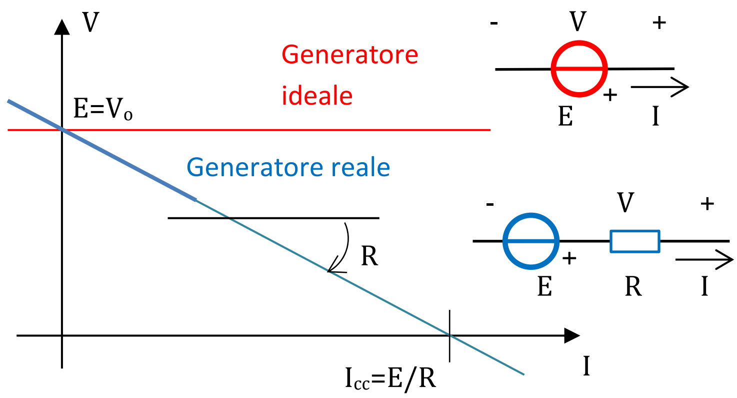
Infine, la potenza alla corrente nominale è semplicemente il prodotto della tensione per la corrente nominali e l'energia è il prodotto della capacità con la tensione nominale. Notiamo che quest'ultima risulta inferiore a quella del solo secondo accumulatore a causa delle limitazioni imposte dal rimo. Ne deduciamo la regola di buon progetto di usare nella serie accumulatori identici o molto simili.

6.8 Generatore ideale e reale di corrente

Problema 6.8: *Una cella fotovoltaica (o un pannello (un aggregato di celle) uniformemente illuminato) ha i suoi morsetti chiusi su un resistore la cui resistenza viene fatta crescere gradualmente dal valore nullo (corto circuito) fino ad ottenere la sua massima potenza erogata dalla cella (assorbita dal resistore). Stimare la corrente che attraversa la resistenza al variare della stessa e spiegare la condizione per cui si ottiene una potenza massima.*

In molti dei circuiti che sono apparsi in problemi precedenti sono inclusi *generatori ideali di tensione* eventualmente combinati con un resistore in serie per ottenere *generatori reali di tensione* che sono una accettabile approssimazione di molte sorgenti di energia elettrica, fra le quali principalmente gli accumulatori e le pile.

Un *generatore ideale di tensione è un bipolo che assicura la tensione E ai suoi morsetti qualsiasi sia la corrente che lo percorre.* Lo possiamo rappresentare graficamente con la sua caratteristica tensione-corrente come sotto in rosso, che è una retta parallela all'asse delle correnti e con ordinata pari ad E.[5]



Il generatore reale di tensione ha un comportamento più vicino (realistico appunto) a quello dei generatori pratici: esso mostra una tensione decrescente con la corrente (con la convenzione di segno dei generatori), a partire dalla fem E, come mostrato dalla caratteristica blu di figura. Essa interseca gli assi in due punti: alla tensione a vuoto (corrente nulla, morsetti aperti) V_o =E e alla corrente di cortocircuito (tensione nulla, morsetti cortocircuitati) I_{cc}=E/R. Più piccola è la resistenza interna R, più piccola la pendenza e più grande la corrente di corto circuito.

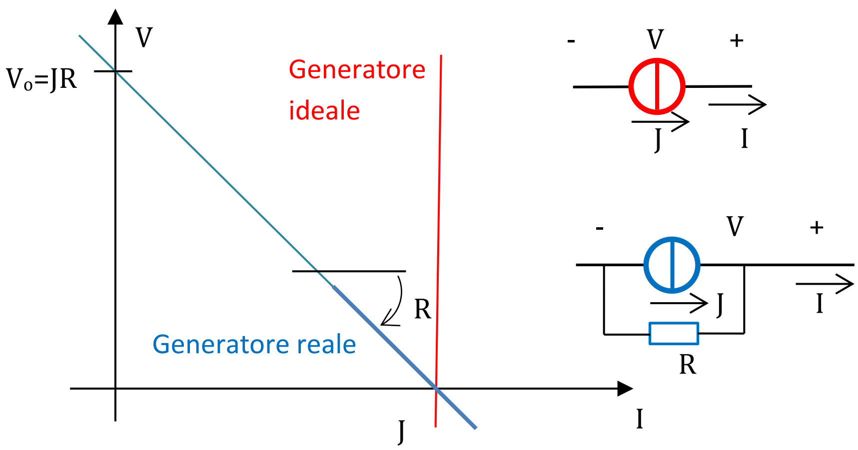
Nella pratica la corrente ammissibile di un generatore di tensione va da zero fino ad un valore massimo (valore nominale, eventualmente anche negativo) che rappresenta la corrente termicamente sostenibile e per la quale i suoi morsetti e i suoi collegamenti sono stati dimensionati. *Non è in generale sostenibile la corrente di cortocircuito; <u>non si può mettere in cortocircuito</u> la batteria di un'automobile o quella di un computer o quella di un impianto di accumulo (storage) di energia elettrica.*

Possiamo definire anche il bipolo duale al generatore ideale e reale di tensione: il *generatore ideale di corrente* e il *generatore reale di corrente.*

Un *generatore ideale di corrente è un bipolo che assicura la corrente (impressa) J da un suo morsetto all'altro qualsiasi sia la tensione fra gli stessi.* Il simbolo convenzionale è quello sotto riportato. Il suo

[5] Un caso particolare è quello con E=0, che assicura tensione nulla fra i morsetti per ogni valore di corrente. E' il caso dell'interruttore ideale chiuso, ossia del cortocircuito.

comportamento lo possiamo rappresentare graficamente con la caratteristica tensione-corrente come sotto in rosso, che è una retta parallela all'asse delle tensioni e con ascissa pari ad J.[6]



Il *generatore reale di corrente* ha un comportamento più vicino (realistico appunto) a quello dei generatori pratici: esso mostra una corrente decrescente con la tensione (con la convenzione di segno dei generatori), a partire dalla corrente impressa J, come mostrato dalla caratteristica blu di figura. Essa interseca gli assi in due punti: alla tensione a vuoto (corrente nulla, morsetti aperti) V_o =JR e alla corrente impressa J (tensione nulla, morsetti cortocircuitati). Più grande è la resistenza interna R, più grande la pendenza e più grande la tensione a vuoto.[7]

Un componente pratico che ben si può rappresentare con un generatore di corrente (piuttosto che di tensione) è la *cella fotovoltaica (o un pannello fotovoltaico)*. Essa è un bipolo che, con la convenzione di segno dei generatori ha la caratteristica mostrata nella figura sottostante, per differenti valori di irradianza, cioè di potenza specifica superficiale [W/m^2] della luce solare che la colpisce. Si tenga presente che è consuetudine, in queste applicazioni, scegliere l'asse delle correnti come asse verticale e quello delle tensioni come asse orizzontale, contrariamente a quanto fatto nelle figure precedenti.

Prendiamo in esame, per esempio, la caratteristica a 1000 W/m^2 (quella in tratto continuo). Se mettiamo in cortocircuito i morsetti del pannello, cioè imponiamo tensione nulla, otteniamo una corrente di 5 A. Se invece lo colleghiamo ad una resistenza da 2 Ω, la corrente rimane ancora circa 5 A e la tensione si alza necessariamente a circa 10 V, come vediamo dalle coordinate del punto di incrocio delle due caratteristiche del pannello e del resistore. Con 3 Ω abbiamo ancora poco meno di 5 A e, conseguentemente, circa 15 V. Il pannello fotovoltaico si comporta pertanto come un generatore reale (quasi ideale) di corrente con corrente impressa pari a 5 A e tensione crescente con la resistenza di carico, almeno fino a tensioni di 15-20 V, secondo la caratteristica in colore riportata in figura, la cui tensione a vuoto (intercetta con l'asse delle tensioni) sarebbe elevatissima.

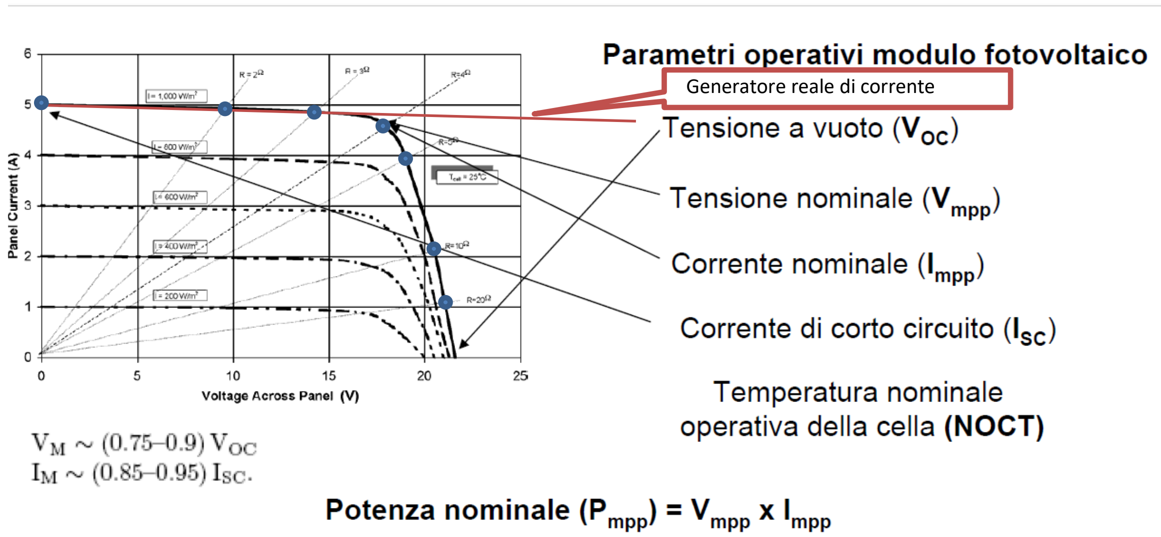
---

[6] Un caso particolare è quello con J=0, che assicura corrente nulla fra i morsetti per ogni valore di tensione. È il caso dell'interruttore ideale aperto, ossia del circuito aperto.

[7] Notiamo che un bipolo con una caratteristica rettilinea che intersechi quindi gli assi del piano tensione-corrente in due punti può essere indifferentemente rappresentato con un generatore di tensione reale o con un generatore di corrente reale.

Di fatto, e fortunatamente, la corrente di una cella fotovoltaica (e quindi anche di un pannello) decade rapidamente al di sopra di una certa tensione (cioè non si comporta più come un generatore di corrente, ma piuttosto come generatore di tensione) limitando la tensione a vuoto, che può tuttavia assumere valori non accettabili.

In definitiva, un pannello fotovoltaico è un generatore di energia elettrica assimilabile ad un generatore di corrente per tensioni da zero fino alla sua tensione nominale e <u>può essere messo in cortocircuito</u> (a parte i pericoli durante i collegamenti volanti dovuti allo scintillio per le intense correnti presenti), mentre <u>potrebbe essere dannoso (o non accettabile) lasciarlo a morsetti aperti</u>.



La potenza erogata P=VI è nulla sia a morsetti in cortocircuito (V=0) che a morsetti aperti (I=0). Ci sarà quindi un punto di lavoro intermedio ove la potenza è massima. Questo rappresenta il punto nominale di lavoro (punto di massima potenza: maximum power point) ed è situato all'incirca sul ginocchio della caratteristica tensione-corrente.[8]

[8] Si invita a calcolare la potenza per ciascuno dei punti di intersezione evidenziati in figura e a riconoscere quello a potenza massima.