PARTE B
Condensatore elettrico
Comportamento dei materiali dielettrici

Premessa – Questa parte delle dispense è dedicata alla “*Elettrostatica”* che riguarda lo studio del comportamento dei materiali dielettrici (isolanti) sottoposti a campi elettrici e delle relative problematiche ed applicazioni.

Nonostante tensioni e correnti possano variare nel tempo (e quindi non siamo più in regime stazionario) assumiamo ancora che valgano i principi di Kirchhoff. Ciò è ragionevolmente vero se le variazioni sono sufficientemente *lente*, ma in seguito perfezioneremo le condizioni per cui valgono questi principi.

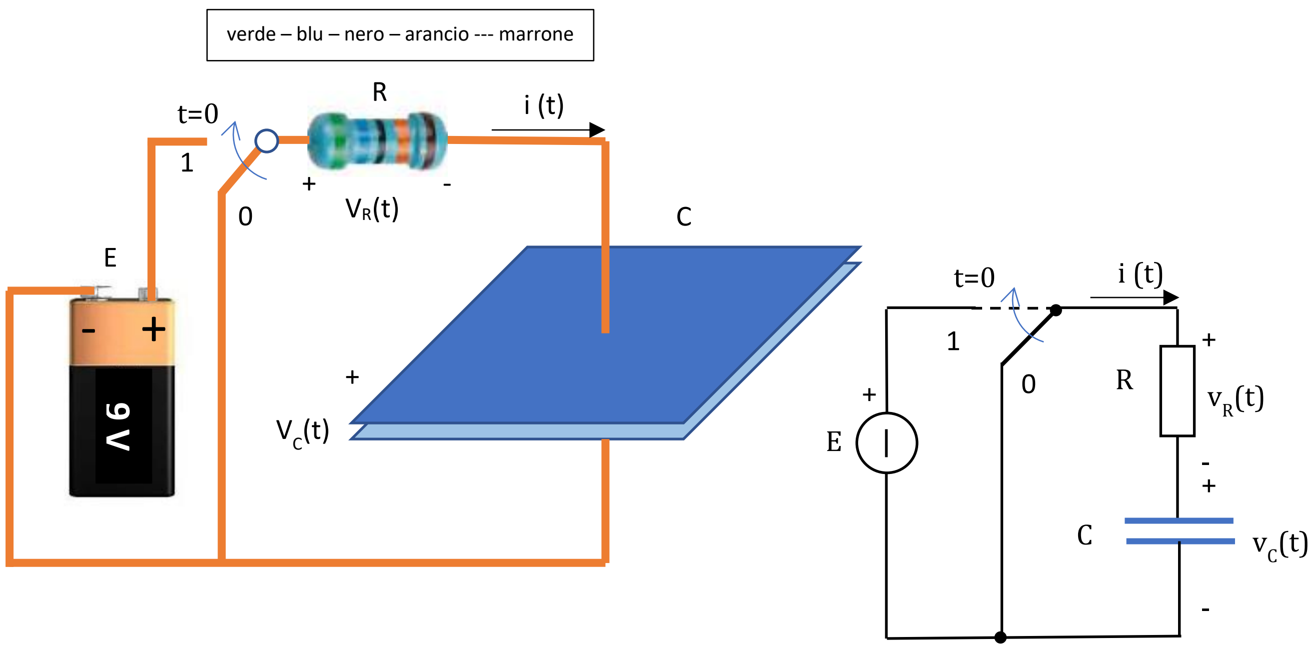
Come al solito gli argomenti sono introdotti mediante esemplificazioni di problematiche pratiche. Partiremo dal concetto di *condensatore elettrico*.

Capitolo 7 - Condensatore elettrico

7.1 Condensatore elettrico – In questo capitolo si riprende il concetto di *condensatore elettrico* che dovrebbe essere stato trattato nella parte di "elettrologia" dell'insegnamento di Fisica. Aspetti concettuali vanno recuperarti in quel contesto. Qui se ne vedrà il comportamento e le leggi fondamentali attraverso la soluzione di problematiche che potrebbero riprodurre, seppure in maniera semplificata, delle applicazioni pratiche.

Problema 7.1 – *Si immagini di avere due lastre di alluminio, piane, dalle dimensioni di 1m x 1m = 1 m^2= S, affacciate l'un l'altra, distanziate dello spazio d= 1 cm con uno spessore uniforme di materiale non conduttore (ossia isolante, dielettrico), come mostrato nel collage di figura (non in scala). Le due lastre NON sono quindi in contatto elettrico fra di loro. A ciascuna piastra, che è denominata armatura, è collegato un terminale. Il bipolo così realizzato prende il nome di condensatore elettrico ed è indicato con C in figura.*

Mediante i suoi due terminali, il condensatore è inserito nel circuito illustrato in figura che contiene un resistore R, una pila E ed un deviatore (interruttore a due posizioni). Per t<0 il deviatore è sempre stato nella posizione 0, ovvero la pila non è di fatto mai stata inserita nel circuito. La maglia R-C, mai alimentata, sarà priva di ogni tensione e di ogni corrente. In t=0 il deviatore è commutato in 1, ove permane per ogni t>0. Si viene così a formare la maglia E-R-C della quale si vuole stimare la corrente i(t), le tensioni sui vari componenti e gli scambi energetici che si manifestano. La figura di destra è una rappresentazione circuitale schematica del sistema fisico di sinistra.

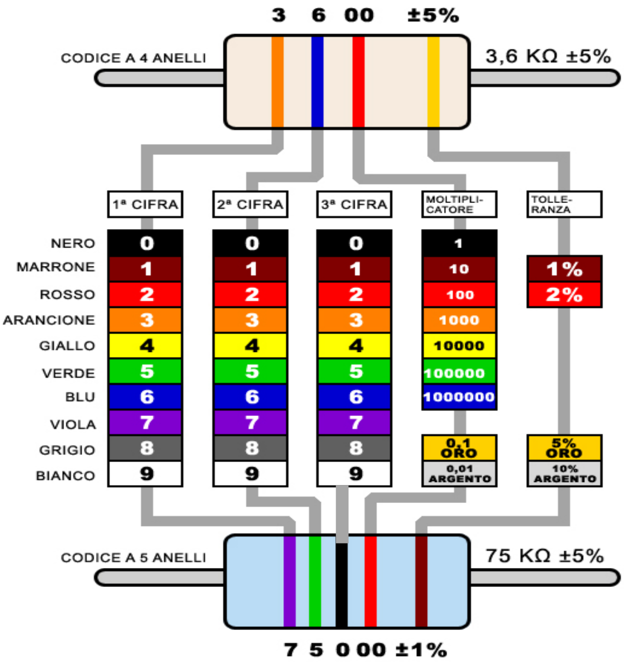


Vediamo prima di tutto di giustificare lo schema circuitale di destra. La pila è rappresentata (semplicemente) con un generatore ideale di tensione di fem E=9V, che è la sua tensione nominale stampata sulla pila.

Il resistore non riporta esplicitamente il suo valore, ma una codifica di esso attraverso una serie di anelli colorati tracciati sul suo corpo cilindrico. Questa è una soluzione nel mondo dell'elettronica per resistori dalla potenza di frazioni di watt fino a qualche watt. Ci sono da 3 a 5 anelli vicini a partire da un estremo e poi, più distanziato, un ultimo anello all'altro estremo. Quest'ultimo anello rappresenta la tolleranza (precisione) con cui il valore della resistenza è dichiarato.

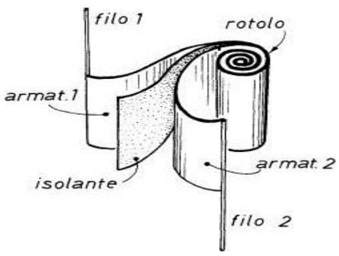
Gli altri anelli, a partire dall'altra estremità del resistore, rappresentano con il loro colore, dapprima, le cifre che compongono il valore della resistenza e, infine con l'ultimo, il fattore moltiplicativo in potenza di 10 da applicare (o il numero di zeri da aggiungere, che è lo stesso).

La figura sottostante riporta i codici-colore e due esempi di codifica per un resistore a 4 codici (sopra) e per uno a 5 codici (sotto) e, nella pagina successiva, la tabella dei valori commerciali delle resistenze della serie E12 (vedi Problema 6.3), tradotti in combinazione di colori.

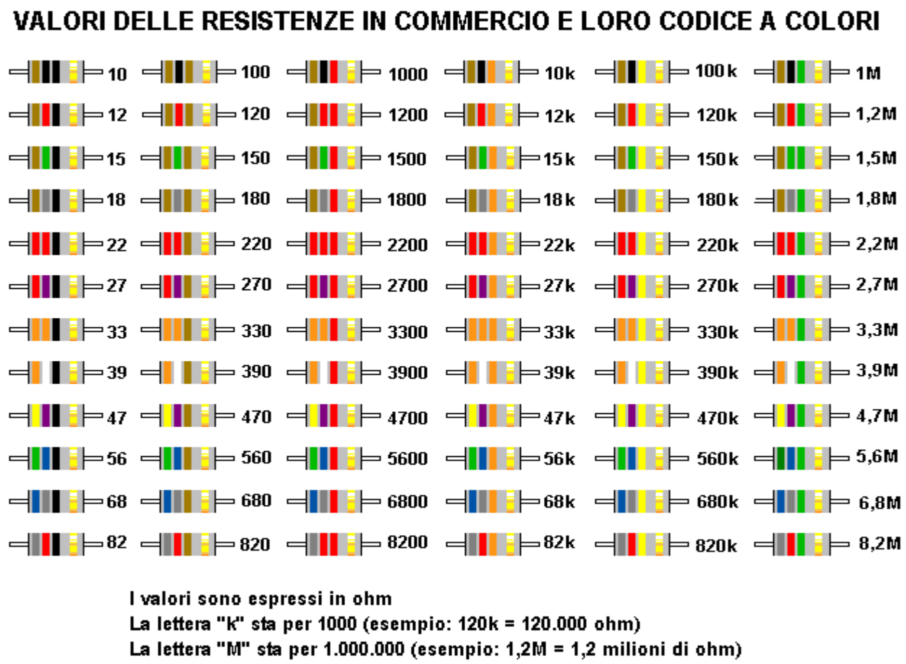


Il resistore del nostro problema è a 5 anelli i cui colori, per chiarezza, sono riportati in figura: verde – blu – nero – arancio --- marrone. Il suo valore è allora: 560 000 Ω con precisione dell'1%.

Infine, il condensatore C lo rappresentiamo con il simbolo normalizzato comunemente usato, due barrette parallele che ne ricordano la struttura fisica reale. Di fatto, per motivi almeno di ingombro, la soluzione reale prevede di arrotolare le armature come esemplificato nella figura che segue.



Il parametro elettrico che caratterizza un condensatore lo vedremo appena più avanti.



Torniamo al nostro problema. Quando l'interruttore è ancora in posizione 0 (ove è sempre stato per t<0) è evidente che non c'è (e non c'è mai stata) alcuna corrente nella resistenza e nel condensatore e le tensioni dei due componenti sono necessariamente quindi nulle.

Quando il deviatore viene commutato in posizione 1, una frettolosa conclusione potrebbe essere che "nulla cambia" perché le due armature del condensatore sono scollegate e quindi il circuito è comunque aperto e valgono quindi le soluzioni di prima. Ciò però non soddisferebbe il principio di Kirchhoff delle tensioni per il quale deve valere (con il deviatore in 1) in ogni istante:

$$v_R(t) \; + \; v_C(t) = E$$

e, pertanto, una o l'altra o entrambe le tensioni su R e C devono essere diverse da zero. La supposta presenza di una tensione sul resistore implica che ci deve essere una corrente $i_R(t) \; = v_R(t)/R = i_C(t) = i(t)$, che è proprio uno dei quesiti del nostro problema. Questa corrente arriva fino all'armatura positiva e riparte dal quella negativa e, quindi, dobbiamo dire che in ogni intervallo di tempo infinitesimo *dt,* fissato nell'istante *t,* essa porta sull'armatura positiva una carica infinitesima

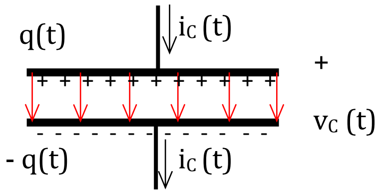
$$dq(t) = i_C(t)\, dt$$

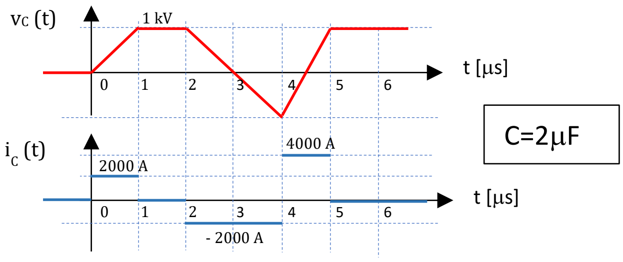
che incrementerà la carica positiva sull'armatura e, allo stesso tempo ridurrà della stessa quantità la carica negativa, uguale ed opposta, sull'armatura negativa, dalla quale la corrente si diparte. Se vogliamo calcolare la carica q sull'armatura positiva (pari a -q di quella negativa) accumulata all'istante generico *t>0*, possiamo allora sommare tutte le cariche infinitesime dall'istante t=0, nel quale il deviatore è stato ruotato, fino al istante *t*:[1]

$$q(t) = \int_0^t i_C(t)\, dt$$

[1] In generale, se ci fosse stata corrente diversa da zero anche per t<0 l'integrale dovrebbe partire da t=-∞.

Possiamo immaginare che la carica q(t) (e -q(t)) si distribuisca uniformemente sulla superficie delle armature positiva (e negativa)[2]. Di conseguenza abbiamo una separazione di cariche e un campo elettrico coulombiano, in particolare uniforme nello spazio interposto fra le armature, come mostrato nella figura che segue a sinistra, tanto più intenso quanto maggiore è la carica q(t).





Siamo allora autorizzati a pensare che ci sarà anche una tensione $v_C(t)$ fra un punto qualsiasi dell'armatura superiore e uno su quella inferiore (per esempio fra i due terminali) e tale tensione sarà tanto maggiore quanto maggiore è il campo elettrico, cioè in definitiva quanto maggiore è la carica q(t). In definitiva carica e tensione saranno proporzionali e ciò lo esprimiamo con la:

$$q(t) = C\, v_C\,(t) \qquad condensatore\ elettrico\ di\ capacità\ C$$

che è l'equazione caratteristica (costitutiva) del condensatore (come v=Ri è quella del resistore). Il coefficiente di proporzionalità C prende il nome di *capacità* del condensatore e la formula ci dice che la sua unità di misura è *coulomb/volt* [C/V] unità di misura alla quale è stato dato il nome di *farad* [F].

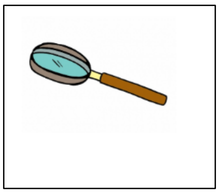
Se deriviamo l'equazione costitutiva e ci ricordiamo che abbiamo già posto $\frac{dq}{dt} = i_C(t)$ otteniamo

$$i_C(t) = C\,\frac{dv_C\,(t)}{dt} \qquad convenzione\ di\ segno\ degli\ utilizzatori$$

Quest'ultima equazione la possiamo anche invertire, integrando i suoi due membri a destra e a sinistra e ricordando che $v_C(t)= q(t)/C$:

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(t)\,dt = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i_C(t)\,dt + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i_C(t)\,dt = v_C(0) + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i_C(t)\,dt$$

ove, per generalità, consideriamo anche il caso in cui ci può essere corrente diversa da zero anche per t<0 e quindi l'integrale parte da t=-∞, istante ne quale "è iniziato il funzionamento del condensatore". L'integrale è stato poi spezzato da -∞ a 0, per calcolare la $v_C(0)$, e da 0 a t per valutare il successivo incremento della tensione.



Meritano alcune osservazioni che possiamo ricavare da quanto scritto:

a. La relazione che dà la *corrente in funzione della tensione* in un condensatore non è una relazione algebrica (come era nel resistore), ma differenziale. La corrente in un dato istante non è legata alla tensione in quell'istante, ma a come sta variando la tensione in quell'istante, ossia dalla derivata della tensione. Possiamo avere istanti con tensioni elevate, ma correnti perfino nulle e, viceversa, altri con tensioni piccole ma correnti elevate.

[2] L'effetto ai bordi è trascurabile se la distanza d fra le armature è molto piccola rispetto alle dimensioni delle stesse. Dell'effetto ai bordi parleremo in seguito.

b. Per esemplificare quanto detto, consideriamo il caso di un condensatore con capacità pari a 2 μF (microfarad ≡ 10^{-6} F) sottoposto ad una tensione avente la forma d'onda mostrata in rosso nella figura precedente.

-- Per t< 0 la tensione è costante (e nulla) per cui la corrente del condensatore i_c=C dv_C/dt è nulla, tale essendo la derivata della tensione.

-- Nel primo intervallo di tempo di durata Δt=1μs la tensione cresce linearmente da 0 a 1 kV e allora la corrente vale $i_c = C\,(dv_C/dt) = C\,(\Delta v_C/\Delta t) = 2 \cdot 10^{-6}\,(1 \cdot 10^3/1 \cdot 10^{-6}) = 2000$ A, come mostrato nel grafico blu di figura.

-- Nel secondo intervallo di tempo, di durata ancora Δt=1μs, la tensione è costante e pari a V_C= 1 kV e allora la corrente vale $i_c = C\,(dv_C/dt) = C\,(\Delta v_C/\Delta t) = 2 \cdot 10^{-6}\,(0/1 \cdot 10^{-6}) = 0$ A. Nonostante la piena tensione di 1 kV non c'è corrente nel condensatore, essendo nulla la derivata della tensione.

-- Nei successivi due intervalli di tempo, di durata complessiva Δt=2μs, la tensione varia linearmente da V_C= +1 kV a V_C= -1 kV e allora la corrente vale $i_c = C\,(dv_C/dt) = C\,(\Delta v_C/\Delta t) = 2 \cdot 10^{-6}\,(-2 \cdot 10^3/2 \cdot 10^{-6}) = -2000$ A. Notiamo che la corrente è sempre -2000 A sia quando la tensione è positiva (fra 2 e 3 μs) che quando è negativa (fra 3 e 4 μs), che quando è nulla (t=3 μs). La corrente non dipende dal valore della tensione, ma dalla sua derivata.

-- Infine segue un intervallo di tempo, di durata Δt=1μs, nel quale la tensione cresce linearmente con un derivata doppia rispetto a quella prima precedentemente calcolata che causa una corrente di +4000 A, seguito da un andamento costante della tensione cui corrisponde, come già visto, una corrente nulla.

c. Vogliamo evidenziare un particolare risultato emerso nel punto precedente: quando la tensione di un condensatore è costante (quindi per esempio quando è inserito in un circuito che funziona in regime stazionario (in corrente continua)) la corrente è nulla, quale che sia la tensione ai suoi capi: *un condensatore in un circuito in corrente continua si comporta (a regime) come un circuito ideale aperto (un interruttore ideale aperto)).*

d. La relazione che dà la *tensione* (così anche la carica, proporzionale alla tensione) *in funzione della corrente* in un condensatore non è una relazione algebrica (come era nel resistore), ma integrale. La tensione in un dato istante non è legata alla corrente in quell'istante, ma a tutto l'andamento della corrente da -∞ fino all'istante *t* in esame. Diciamo per questo che il condensatore è un componente con memoria.

e. Possiamo dedurre anche un'altra proprietà importante del funzionamento di un condensatore. Ci vengono in aiuto gli andamenti di tensione (rosso) e corrente (blu) precedentemente usati come esempio. Notiamo che la corrente può avere delle discontinuità (variazioni a gradino) e ciò succede ogniqualvolta la tensione cambia d'improvviso la sua pendenza (la sua derivata). Invece, *la tensione del condensatore non ha discontinuità (variazioni a gradino)*. Per aversi una discontinuità di tensione, si deve avere una discontinuità della carica sulle armature e, quindi, un apporto o prelievo di una quantità finita di carica in tempi nulli. Ciò vuol dire una corrente elettrica di intensità infinita che nella pratica non si può mai avere. La capacità di un condensatore sta alla corrente e alla tensione come l'inerzia di un volano sta alla coppia applicata e alla velocità: la velocità non ha discontinuità nonostante variazioni anche a gradino della coppia ed è "tanto più costante" quanto maggiore è l'inerzia. Così il condensatore è usato a volte come elemento per "livellare (spianare)" la tensione a fronte di una corrente molto variabile.

Riprendiamo il problema. Per risolverlo quantitativamente abbiamo bisogno di definire il valore del parametro C, *capacità*, del condensatore, che per la forma delle sue armature è, più precisamente, un *condensatore piano.* Possiamo osservare che la capacità sarà

$$C = \frac{q(t)}{v(t)}$$

e dipenderà, come succede per la resistenza, dai parametri fisici e geometrici della struttura. Intuitivamente possiamo dedurre che *la carica q* a parità del resto (intensità del campo elettrico, distanza, quindi tensione) *sarà tanto maggiore quanto maggiore è la superficie delle armature*.

Viceversa, se manteniamo fisse la carica e la superficie e allontaniamo o avviciniamo le armature, le linee di campo si allungano o accorciano e con esse la tensione fra le armature. In definitiva, a parità del resto (superficie, carica), *la tensione cresce al crescere della distanza*.

Siamo allora indotti a pensare valida per la capacità di un condensatore piano (come si potrebbe dimostrare con un procedimento più rigoroso) la formula

$$\boxed{C = \varepsilon \frac{S}{d} = \varepsilon_o \varepsilon_r \frac{S}{d} \quad \textit{capacità di un condensatore piano}}$$

ove S è l'estensione delle superfici affacciate delle armature e d la distanza fra le stesse. Il coefficiente ε tiene conto dell'effetto del materiale dielettrico interposto fra le armature e prende il nome di *costante dielettrica (o permettività) del mezzo* e si esprime in farad/metro [F/m] quando la superficie S è in [m^2] e la distanza d in [m].

Per il vuoto la fisica fornisce il valore

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_o = 8.854 \cdot 10^{-12}\ F/m \quad \textit{costante dielettrica del vuoto}}$$

Per materiali diversi dal vuoto poniamo $\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r$ ovvero, per comodità usiamo la permettività relativa ε_r che il mezzo ha rispetto al vuoto ($\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_o$, parametro adimensionale). *Del comportamento dei materiali dielettrici, dei valori della permettività relativa e di altri aspetti sui materiali discuteremo in seguito.*

Qui, per completare il problema, supponiamo che il materiale dielettrico sia aria secca per la quale vale $\varepsilon_r = 1$. Allora il nostro condensatore piano ha la capacità:

$$C = \varepsilon_o \varepsilon_r \frac{S}{d} = 8.854 \cdot 10^{-12}{}_{[F/m)} \cdot 1 \frac{(1 \cdot 1)_{[m^2]}}{0.01_{[m]}} = 885.4 \cdot 10^{-12}\ F \equiv 885.4\ pF$$

NB: Un valore di capacità di 1 F è molto grande e spessissimo le capacità dei condensatori pratici hanno capacità inferiori ad esso ed espresse con i suoi sottomultipli che sono :

millifarad, mF: 10^{-3} F; microfarad, μF: 10^{-6} F; nanofarad, nF: 10^{-9} F; picofarad, pF: 10^{-12} F;

7.2 Processo di carica di un condensatore elettrico mediante una fem E costante e una R costante

– I dati del problema, cioè in parametri elettrici del circuito sono ora completamente definiti e possiamo passare alla sua risoluzione.

Se prendiamo l'equazione di bilancio delle tensioni ed esprimiamo la tensione sul resistore con la v_R=Ri, arriviamo a

$$v_R(t)\ +\ v_C(t) = R\ i(t)\ +\ v_C(t) = E$$

e poi, espressa la corrente con l'equazione del condensatore:

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt}\ +\ v_C(t) = E$$

che è l'equazione differenziale (lineare, del primo ordine) che descrive la dinamica (il transitorio) del circuito in esame per t >0 e la cui soluzione ci dà l'andamento nel tempo della tensione sul condensatore per t>0.

Come noto dalla Matematica la soluzione si compone di due contributi:

$$v_C(t) = v_{C,p}(t) + v_{C,o}(t)$$

dove $v_{C,p}(t)$ è la soluzione particolare (una qualsiasi funzione del tempo che sia soluzione dell'equazione data, col suo termine noto), mentre $v_{C,o}(t)$ è la soluzione dell'omogenea (soluzione dell'equazione data, resa omogena ponendo a zero il termine noto).

Visto che il termine noto è una costante (pari a E), una soluzione particolare facilmente individuabile è la tensione costante (derivata nulla):

$$v_{C,p}(t) = E$$

che soddisfa di certo l'equazione data (basta sostituirla nell'equazione per verificare).

Per trovare invece la soluzione dell'omogenea occorre scrivere prima *l'equazione algebrica caratteristica associata* che è:

$$RC \cdot s\ +\ 1 = 0$$

e trovarne la radice

$$s\ = -\ \frac{1}{RC}$$

che ci consente di scrivere la *soluzione generale dell'omogenea* nella forma

$$v_{C,o}(t) = A\ e^{+st} = A\ e^{-t/\tau}$$

In questa si è posto τ= RC che dimensionalmente è un tempo e che prende il nome di *costante di tempo della maglia (circuito) RC.* Per il nostro problema*:*

$$\tau = RC = 560\ 10^{3} \cdot 885.4\ 10^{-12} = 495.8\ 10^{-6}\ s \equiv 495.8\ \mu s \equiv 0.4958\ ms$$

La costante A, che dimensionalmente è una tensione, la calcoliamo imponendo le condizioni iniziali e cioè che il valore iniziale $v_C(0)$ della soluzione trovata corrisponda al valore della tensione in t=0 del nostro caso specifico. Non potendo la tensione di un condensatore avere discontinuità (vedi punto e. nell'approfondimento fatto sopra) ed essendo quella del nostro condensatore nulla prima della commutazione del deviatore, il valore iniziale sarà $v_C(0)=0$.

$$v_C(0) = v_{C,p}(0) + v_{C,o}(0) = \left(E + A\, e^{-t/\tau}\right)_{t=0} = E + A = 0$$

dalla quale ricaviamo che deve essere A=-E il che ci consente di scrivere che la tensione sul nostro condensatore per t>0 sarà espressa dalla:

$$v_C(t) = E + A\, e^{-t/\tau} = E + (-E)\, e^{-t/\tau}$$

ossia in definitiva

$$\boxed{v_C(t) = E\,(1 - e^{-t/\tau}) \quad \textit{tensione di carica di un C attraverso } E - R \textit{ costanti}}$$

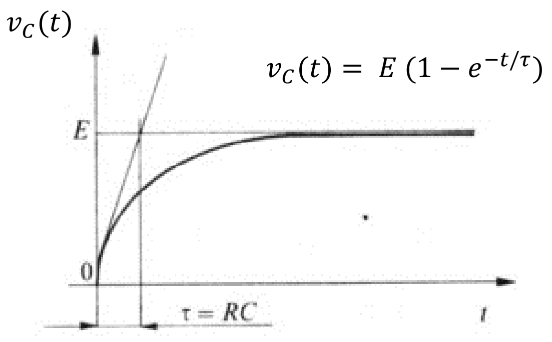
Notiamo che la tensione parte da zero per t=0 e poi cresce dapprima velocemente e poi più lentamente per tendere, asintoticamente, al valore $v_C(\infty) = E$. Il processo studiato è la *carica di un condensatore attraverso un circuito E-R con fem e resistenza di valori sotanti (che potrebbe essere la schematizzazione di un generatore reale di tensione). Il valore* $v_C(\infty) = E$ *è la tensione finale di carica. La carica finale del condensatore sarà* $q(\infty) = Q = Cv_C(\infty) = CE$.

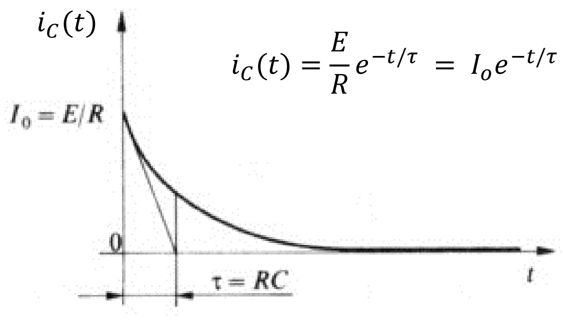
Ne consegue che la corrente $i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$ diventa

$$\boxed{i_C(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau} = I_o e^{-t/\tau} \quad \textit{corrente di carica di un C attraverso } E - R}$$

Notiamo che la corrente passa istantaneamente in t=0 da zero a I_o = E/R per poi decrescere esponenzialmente, dapprima velocemente e poi più lentamente per raggiungere, asintoticamente, il valore $i_C(\infty) = 0$, che *è la corrente finale di carica.*

La figura che segue mostra gli andamenti della tensione e della corrente del condensatore per t>0.





Vediamo di svolgere un *bilancio energetico* durante il processo di carica del condensatore con un generatore reale di tensione.

L'energia erogata (lavoro elettrico erogato) W_E dal generatore ideale di tensione E durante l'intero processo di carica è pari all'integrale della potenza istantanea erogata (potenza calcolata con la convenzione di segno dei generatori) da t=0 a t= ∞. Risulta allora:

$$W_E = \int_0^{\infty} E \cdot i(t)dt = E \int_0^{\infty} i(t)dt = E \cdot q(\infty) = EQ = CE^2$$

Questa energia è in parte assorbita dal resistore (e dissipata per effetto Joule) e in parte assorbita dal condensatore. Quest'ultima la calcoliamo integrando la potenza assorbita (potenza calcolata con la convenzione di segno degli utilizzatori) da t=0 a t= ∞. Risulta:

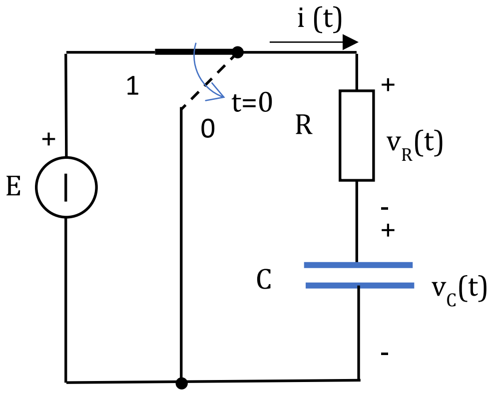
$$W_C = \int_0^{\infty} v_C(t) \cdot i(t)dt = \int_0^{\infty} v_C(t)(C\frac{dv_C(t)}{dt})dt = C\int_{v_C(0)}^{v_C(\infty)} v_C(t)dv_C(t) = \frac{1}{2}Cv_C^2(\infty) = \frac{1}{2}CE^2$$

che è proprio pari alla metà di quella erogata dal generatore. L'altra metà è andata dissipata per effetto Joule sul resistore, qualsiasi sia il valore della resistenza. Si dice che *il processo di carica di un condensatore mediante un circuito E-R ha un'efficienza del 50%.*

Vedremo anche, a breve, che l'energia assorbita dal condensatore (ideale, cioè privo di resistenze interne) è da esso accumulata e può essere restituita mediante una scarica del condensatore stesso. <u>Il condensatore è un elemento conservativo, capace di accumulare energia e di restituirla.</u>

7.3 Processo di scarica di un condensatore elettrico mediante una R costante – Per

completare lo studio del condensatore, vediamo ora il *processo di scarica*. Supponiamo che la carica, precedentemente vista, sia avvenuta per t<0 (con il deviatore in posizione 1 da t= - ∞ a t=0) e il condensatore sia quindi perfettamente carico in t=0. Allora avremo $v_C(0)=V_o=E$. Nell'istante t=0 il deviatore viene commutato in posizione 0 per scaricare il condensatore. La situazione di scarica è illustrata nella figura che segue. Manteniamo gli stessi versi positivi per tensioni e correnti già adottati per lo studio della carica.



Il bilancio delle tensioni nella maglia RC che si viene a creare per t>0 è simile al precedente già visto, salvo che non è coinvolta la fem E. Allora esso è espresso dalla:

$$v_R(t) + v_C(t) = 0$$

che diventa, seguendo lo stesso procedimento di prima:

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = 0$$

che è l'equazione differenziale (lineare, del primo ordine), omogenea in questo caso, che descrive la dinamica (il transitorio) della scarica del condensatore C sulla resistenza R per t >0 e la cui soluzione ci dà l'andamento nel tempo della tensione sul condensatore per t>0.

In questo caso non c'è integrale particolare e la soluzione è allora solo la soluzione dell'omogenea

$$v_C(t) = A\, e^{+st} = A\, e^{-t/\tau}$$

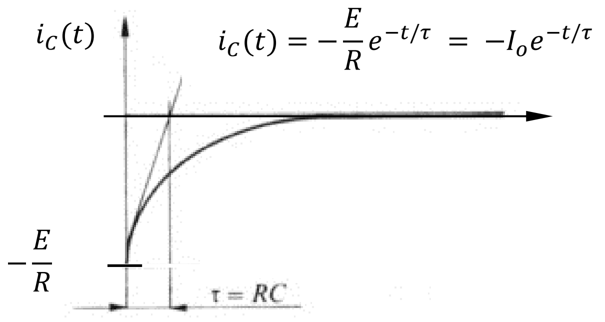
con τ=RC. L'imposizione delle condizioni iniziali, ossia che $v_C(0)=V_o=E$ ci porta a fissare A= V_o=E sicché la tensione è in definitiva:

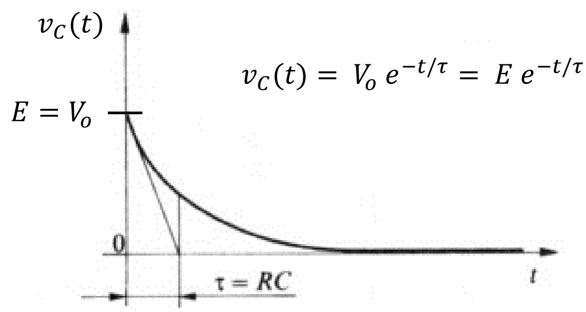
$$\boxed{v_C(t) = E\, e^{-t/\tau} = V_o\, e^{-t/\tau} \quad \textit{tensione di scarica di un condensatore C su una resitenza R}}$$

Derivando l'espressione della tensione e moltiplicando per C otteniamo la corrente

$$\boxed{i_C(t) = -\frac{E}{R}e^{-t/\tau} = -I_o e^{-t/\tau} \quad \textit{corrente di scarica di un condensatore C su una resistenza R}}$$

Gli andamenti della corrente e della tensione sono tracciata nella figura seguente.





Anche in questo caso possiamo svolgere il *bilancio energetico del processo di scarica*. Visto che tensione e corrente del condensatore sono stati calcolati con la convenzione di segno degli utilizzatori, il loro prodotto dà la potenza assorbita e l'integrale di questa da t=0 a t= ∞ l'energia assorbita dal condensatore. Allora

$$p_C(t) = v_C(t) i_C(t) = -V_o I_o\, (e^{-t/\tau})^2$$

che è sempre negativa, come necessariamente deve essere perché la potenza assorbita dal resistore sarà necessariamente positiva ($p=Ri^2$) e la somma delle potenze deve essere zero essendo tutti i bipoli orientati con la convenzione di segno degli utilizzatori. In termini comprensibili si può dire che il condensatore C assorbe una potenza negativa, quindi di fatto eroga una potenza positiva uguale e contraria e il resistore assorbe e dissipa, istante per istante, la stessa potenza.

Integrando la potenza del condensatore abbiamo (si ricorda che ora è $v_C(0)=E$, $v_C(\infty)=0$) :

$$W_C = \int_0^{\infty} v_C(t) \cdot i(t)dt = \int_0^{\infty} v_C(t)(C\frac{dv_C(t)}{dt})dt = C\int_{v_C(0)}^{v_C(\infty)} v_C(t)dv_C(t) = -\frac{1}{2}Cv_C^2(0) = -\frac{1}{2}CE^2$$

cioè una energia assorbita (assorbita perché è stata calcolata con la convenzione di segno degli utilizzatori) negativa. Il suo valore cambiato di segno è l'energia erogata ed è proprio pari a quella assorbita durante la fase di carica, precedentemente calcolata. Ciò prova quanto affermato che *il condensatore è un componente conservativo: il lavoro elettrico che assorbe in certe fasi di funzionamento lo conserva come energia accumulata e lo rende, se richiesto, in altre fasi. Se $v_C(t)$ è la tensione in un certo istante t e C è la capacità del condensatore allora l'energia accumulata in quell'istante vale:*

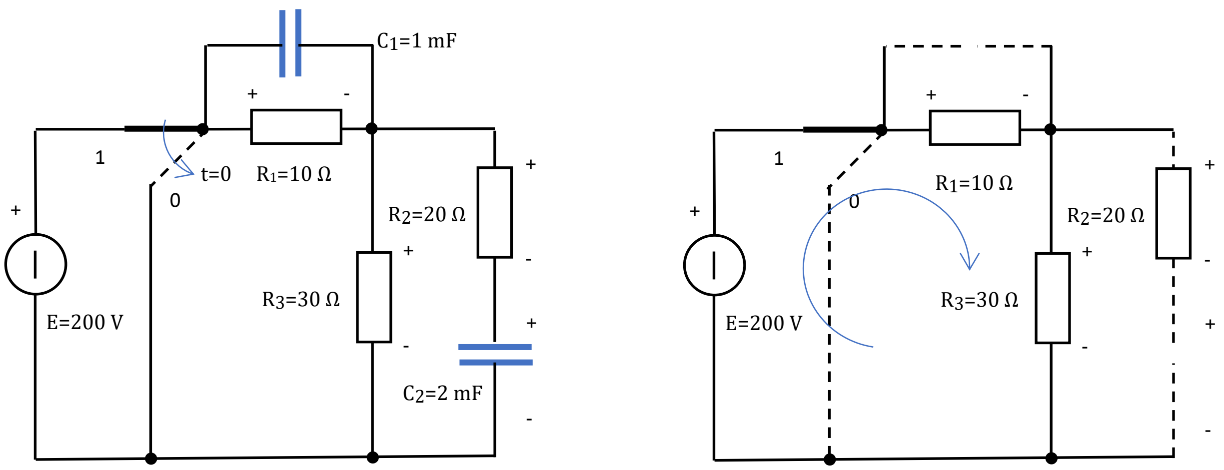
$$\boxed{w_C(t) = \frac{1}{2}Cv_C^2(t) = \frac{1}{2}q(t)v_C(t) = \frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C} \quad \textit{energia accumulata in un condensatore}}$$

che dipende solo dai valori della tensione o della carica nell'istante t, indipendentemente da come si sia arrivati a quei valori.

Problema 7.2: *Consideriamo il circuito a sinistra nella figura sottostante, supposto in regime stazionario (in corrente continua) in t=0 con il deviatore in posizione 1.*

1^ Parte: Calcolare le tensioni e le correnti del circuito in quell'istante t=0.

NB: Ciò significa che per t<0 si è avuta la carica dei due condensatori, che è definitivamente completata in t=0; avendosi in questo caso due condensatori, con tensioni indipendenti, gli andamenti di tali tensioni durante la carica non saranno quelle viste in precedenza, valide per la carica di un solo condensatore. Si dimostra che in questo caso il sistema è del secondo ordine ed esso sarà governato da due costanti di tempo. Ma tali andamenti non sono richiesti: si chiede solo il valore finale delle grandezze, a carica completata, quando il circuito è arrivato a regime.



Come prima operazione fissiamo i versi positivi delle tensioni e delle correnti. Sul circuito sono indicati i versi positivi delle tensioni; quelli delle correnti devono essere coordinati con i primi secondo la convenzione di segno degli utilizzatori per i bipoli R e C e quella dei generatori per il generatore ideale E.

Si è visto che i condensatori in regime stazionario (in corrente continua) si comportano come circuiti aperti con corrente quindi nulla. Tenendo anche conto della posizione del deviatore, per lo studio del regime stazionario possiamo allora ridisegnare il circuito come a destra, dove sono tratteggiati i rami certamente non percorsi da corrente. Rimane una sola maglia percorsa dalla corrente $I_E= I_{R1}= I_{R3}$ il cui valore sarà:

$$I_E= I_{R1}= I_{R3} = E/(R_1 + R_3) = 200/(10 + 30)=5\ A$$

mentre $I_{R2}=0$.

Le tensioni allora sono:

$$V_{R1}= V_{C1} = I_{R1}R_1 = 5*10 = 50\ V$$

$$V_{R2} = I_{R2}R_2 = 0\ \ V$$

$$V_{R3} = I_{R3}R_3 = 5*30 = 150\ V$$

NB: osserviamo che $V_{R1}+ V_{R3}=E$ come deve essere per il principio di Kirchhoff.

Per la maglia R_3-R_2-C_2 di destra deve valere:

$$V_{R3} = V_{R2} + V_{C2}$$

da cui, essendo $V_{R2}=0$:

$$V_{C2} = V_{R3} = 150\ V$$

e il circuito è totalmente risolto.

NB: si invita a svolgere il bilancio delle potenze.

2^ Parte: A partire dal regime stazionario calcolato, in t=0 si commuta il deviatore in 0, escludendo quindi dal circuito il generatore ideale di tensione e avviando la scarica dei condensatori sulla rete delle resistenze. Calcolare la <u>totale energia dissipata per effetto Joule sul complesso dei tre resistori</u>.

NB: non è richiesto di calcolare l'energia dissipata in ciascun resistore, ma quella totale dissipata sul complesso dei tre resistori.

Per t>0 il circuito sarà interessato dalle tensioni e correnti dei transitori di scarica dei condensatori. Le conseguenti potenze assorbite dai resistori non possono che essere fornite dai condensatori che consumeranno la loro energia precedentemente accumulata. Quando la scarica sarà esaurita, le tensioni sui condensatori saranno nulle (come tutte le altre tensioni e correnti del circuito) e nulla sarà anche l'energia accumulata in essi. Tutta l'energia che era accumulata in t=0 sarà stata dissipata sul complesso delle tre resistenze e allora possiamo dire che

Totale energia dissipata $W_J = (1/2)\ C_1(V_{C1})^2+(1/2)\ C_2(V_{C2})^2=0.5\cdot(1\ 10^{-3})50^2 +0.5\cdot(2\ 10^{-3})150^2 = 23.75\ \ J$

che è la risposta cercata.

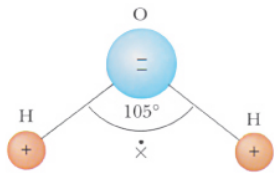
Capitolo 8 - Materiali dielettrici

In questo modulo si descrive il comportamento dei materiali dielettrici ed in particolare il loro effetto quando impiegati come materiale isolante fra le armature di un condensatore *elettrico.* Pure tali nozioni dovrebbero essere state trattate nella parte di “elettrologia” dell’insegnamento di Fisica. Qui saranno richiamati i concetti fondamentali e poi applicati alla soluzione di semplici problemi pratici.

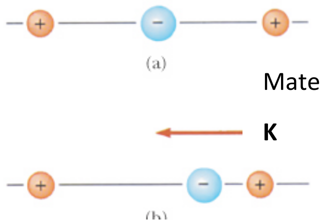
Ricordiamo che i metalli sono materiali caratterizzati da una struttura cristallina con atomi ai vertici di un reticolo poliedrico. La disposizione degli atomi nel reticolo è tale che 1-2 elettroni delle orbite esterne siano liberi (la sola agitazione termica è in grado di farli saltare da un atomo all’altro). Se si applica un campo elettrico essi si muovono. *I metalli sono conduttori (elettrici) e gli atomi citati costituiscono la carica libera.*

Nei *materiali dielettrici* gli atomi e le molecole hanno elettroni ben legati ai nuclei. Con forti interventi localizzati (strofinio), si possono spostare le cariche, ma in genere non vi sono cariche libere. In genere sono anche complessivamente neutri. In presenza di campo esterno non si ha spostamento di cariche (non si ha corrente elettrica) ma si può avere al più una polarizzazione del dielettrico.

Le molecole sono dette polarizzate quando il baricentro delle cariche positive è diverso da quello delle cariche negative. Per la molecola dell’acqua (sotto a sinistra) questa condizione è sempre verificata per la disposizione naturale dei suoi atomi (molecola polare). A livello macroscopico l’effetto della polarizzazione delle molecole di acqua non si manifesta poiché le molecole in un volume d’acqua sono orientate in modo casuale. Ma se c’è un campo elettrico le molecole si allineano al campo.



Materiale polare (acqua)



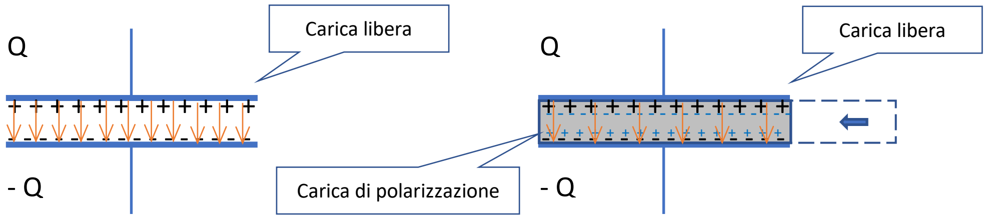
Materiale apolare

NB: Nel forno a microonde c’è un campo elettrico alternato nel tempo: esso rovescia la sua direzione (il + diventa –, il – diventa +) con frequenza di 2.45 GHz, cioè 2.45 miliardi di volte al secondo. Alla stessa frequenza cambia l’orientazione delle molecole dell’acqua (e di altre sostanze polari). E questi continui e frequentissimi rovesciamenti di orientamento si svolgono a spese di una energia che è dissipata con gli urti e gli attriti interni e che scalda l’acqua. Altri materiali invece, apolari (non polari), non risentono dei rovesciamenti del campo elettrico e non li seguono e quindi non si riscaldano (materiali per contenitori da microonde, per es. vetro, siliconi, polietilene).

Una molecola simmetrica (apolare) non ha polarizzazione naturale (permanente), ma essa può essere indotta da una campo esterno. Il campo elettrico sposta la nube elettronica con carica negativa e induce una *polarizzazione per deformazione* (figura a destra). Questo è l’effetto dominante nella maggior parte dei materiali usati come dielettrici nei condensatori.

Problema 8.1: *Prendiamo un condensatore piano in aria (nella figura sotto a sinistra), con superficie delle armature pari a S=0.6 m² e distanza fra le stesse d=0.4 mm. Carichiamolo alla tensione V= 500 V e poi stacchiamolo dal circuito.*

1^ Parte: determiniamo la capacità del condensatore, la carica sulle armature e l'energia accumulata.



Essendo un condensatore piano in aria la sua capacità la possiamo calcolare con la formula ricavata nel Problema 7.1:

$$C = \varepsilon_o \varepsilon_r \frac{S}{d} = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot \frac{0.6}{0.004} = 1.328 \cdot 10^{-9}\, F \equiv \; 1.328\, nF$$

Con tale capacità, quando la tensione sul condensatore è V= 500 V la carica sarà

$$Q = CV = 1.328 \cdot 10^{-9} \cdot 500 = 6.640 \cdot 10^{-7}\, As$$ [3]

Se il condensatore è staccato dal circuito elettrico che lo ha caricato, e cioè rimane a morseti aperti, la corrente è identicamente nulla, nessun apporto né prelievo di carica si manifestano e, pertanto, la carica sulle armature rimane costante e con essa la tensione.

Un condensatore può permanere carico (cioè mostrare tensione fra i morsetti diversa da zero) dopo un suo normale funzionamento se si trova in condizioni di corrente i=dq/dt = 0 e quindi q costante. Questo fatto può rilevarsi pericoloso nel caso di condensatori operanti in circuiti con tensioni elevate (per esempio quadri elettrici, apparecchiature elettroniche di potenza, forno a microonde,...): tali condensatori possono mantenere la tensione che hanno durante il loro normale funzionamento anche a quadro o apparecchiatura spenti. Per evitare possibili folgorazioni degli operatori, la normativa prevede, nel caso di funzionamento con tensioni pericolose, che in parallelo al condensatore sia collegata permanentemente una resistenza capace di scaricarlo in pochi secondi quando i sistemi vengono spenti.

Se tale dispositivo non è presente, è buona norma prima di maneggiare condensatori presenti in un impianto, anche se spento, assicurarsi di scaricarli con un resistore che viene connesso (con adeguata cautela) temporaneamente fra i suoi morsetti e, magari lasciato connesso finché non si deve rimettere in funzionamento il circuito. Una lampada ad incandescenza può essere una buona soluzione.

[3] Quanti elettroni sono stati rimossi dall'armatura positiva e spostati su quella negativa?

L'energia nel condensatore la calcoliamo con una di queste formule

$$W_C = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{(6.640 \cdot 10^{-7})^2}{1.328 \cdot 10^{-9}} = 1.66 \cdot 10^{-4}\ J$$

2^ Parte: mantenendo il condensatore isolato dal circuito elettrico (cioè a morsetti aperti) inseriamo fra le armature una lastra di vetro dallo spessore d=0.4 mm (in figura a destra). Essendo il vetro un materiale polarizzabile per deformazione, quale sarà l'effetto sulla capacità del condensatore, la carica sulle armature e l'energia accumulata?

Per quanto abbiamo dedotto sopra, il condensatore a morsetti aperti conserva la sua carica precedentemente accumulata e pertanto, anche con la lastra di vetro inserita (che non è un conduttore elettrico e non consente quindi lo spostamento delle cariche da un'armatura all'altra) la carica sarà Q= $6.640 \cdot 10^{-7}\ As$.

Il campo elettrico fra le armature polarizzerà il dielettrico, deformando le sue molecole in modo da stirare verso l'armatura positiva le regioni delle molecole con carica negativa e viceversa quelle con carica positiva saranno tirate verso l'armatura negativa. Le cariche spostate per polarizzazione nel dielettrico non sono tuttavia in grado di lasciare il dielettrico stesso e quindi non fanno a combinarsi con la *carica* cosiddetta *libera* sulle armature, portata dalla corrente elettrica che era ai terminali del condensatore, ma si addensano solo in prossimità delle armature (vedi figura sopra a destra). Il risultato di questo fenomeno è una parziale cancellazione degli effetti delle cariche sulle armature, cioè del campo elettrico fra le stesse. Pur mantenendo la stessa direzione e lo stesso verso, il campo elettrico risulterà diminuito (si riconosce in figura per le frecce più diradate) e con esso anche la tensione fra i morsetti. In sostanza abbiamo

$$V_{con\ dielettrico} < V_{senza\ dielettrico} \qquad a\ parità\ di\ carica\ libera\ sulle\ armature$$

La capacità del condensatore con dielettrico risulterà invece

$$C_{con\ dielettrico} = \frac{Q}{V_{con\ dielettrico}} > \frac{Q}{V_{senza\ dielettrico}} = C_{senza\ dielettrico}$$

il che giustifica che la capacità di un condensatore con dielettrico si calcoli utilizzando nella formula una costante dielettrica $\varepsilon=\varepsilon_o\varepsilon_r>\varepsilon_o$ ossia una costante dielettrica relativa del mezzo $\varepsilon_r>1$.

Il valore della costante dielettrica di alcuni materiali dielettrici è riportato nella tabella qui sotto.

Nel caso del vetro possiamo assumere $\varepsilon_r>7$ e questo ci consente di stimare la nuova capacita C_v con il dielettrico in vetro che sarà

$$C_v = \varepsilon_o\varepsilon_r\frac{S}{d} = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot \mathbf{7} \cdot \frac{0.6}{0.004} = 9.296 \cdot 10^{-9}\ F \equiv 9.296\ nF$$

cui corrisponde la tensione (ferma restando la carica)

$$V_v = \frac{Q}{C_v} = \frac{6.640 \cdot 10^{-7}}{9.296 \cdot 10^{-9}} = 71.43\ V$$

ε_r = **Costanti dielettriche relative**		
Costante dielettrica assoluta del vuoto ε_o = **8,854·10⁻¹²** [F/m]		
Mezzo dielettrico	Costante dielettrica relativa	Rigidità dielettrica [kV/mm]
Aria secca (alla pressione di 1 [bar])	**1,0006**	**3**
Acqua pura	**81,07**	**15**
Olio minerale	**2,2 ÷ 2,5**	**7,5 ÷ 16**
Olio per trasformatori	**2 ÷ 2,5**	**12 ÷ 17**
Bachelite	**5,5 ÷ 8,5**	**10**
Carta comune	**2**	**6**
Carta paraffinata	**2,5 ÷ 4**	**40 ÷ 50**
Carta da condensatori	**5 ÷ 5,5**	**30**
Gomma	**2,2 ÷ 2,5**	**15 ÷ 40**
Mica	**6 ÷ 8**	**50 ÷ 100**
Polietilene	**2,3**	**50**
Porcellana	**4 ÷ 7**	**12 ÷ 30**
Vetro	**6 ÷ 8**	**25 ÷ 100**
Ossido di titanio	**90 ÷ 170**	**5**
Titanati di Ba-Sr	**1000 ÷ 10000**	**5**

e l'energia

$$W_{Cv} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_v} = \frac{1}{2}\frac{(6.640 \cdot 10^{-7})^2}{9.296 \cdot 10^{-9}} = 0.237 \cdot 10^{-4}\ J$$

che è 7 volte più piccola di quella del condensatore in aria.

Visto che il circuito è aperto e la corrente nulla, non ci può essere stato scambio di lavoro elettrico ai morsetti del condensatore. Allora, dove è andata a finire l'energia mancante?

Si potrebbe sperimentare che quando si avvicina la lastra di vetro, questa viene attratta (risucchiata) dal condensatore. Se il suo movimento fosse frenato da una molla, questa risulterebbe alla fine allungata dalla forza di attrazione prodotta dal condensatore. Alla fine del processo l'energia accumulata nel condensatore è diminuita e l'energia elastica della molla è cresciuta dello stesso ammontare: abbiamo attuato una conversione elettromeccanica, da energia elettrica ad energia elastica.

8.2 Rigidità dielettrica, Campo elettrico ai bordi

Problema 8.2: *Prendiamo in considerazione i due condensatori precedentemente studiati, uno col dielettrico aria e l'altro col dielettrico vetro. Immaginiamo di applicare ai loro morsetti una tensione via via crescente fino a un valore per il quale, l'esperienza pratica ci insegna, si manifesterà una scarica elettrica (flash) fra le armature. Vogliamo comprendere questo fenomeno e stimare la tensione di scarica.*

Incominciamo con il caso del condensatore in aria. Al crescere della tensione ai morsetti cresce il campo elettrico fra le armature e con esso la deformazione delle molecole sottoposte alla polarizzazione dovuta al campo elettrico e la velocità di transito da un'armatura all'altra degli eventuali ioni presenti nell'aria, frenati solo dagli urti con atomi e molecole. Se il campo elettrico (in definitiva la tensione) è sufficientemente elevata la polarizzazione per deformazione è in grado di rompere le molecole creando ulteriori ioni che, assieme agli altri già presenti, creano un flusso di intensità sufficientemente grande da innescare un processo autoesaltante a valanga che è appunto la scarica elettrica.

Nel caso del vetro la spiegazione è simile. La polarizzazione può causare una deformazione tale che le molecole si rompono e gli ioni, liberi di muoversi in modo dirompente sotto l'effetto dell'intenso campo elettrico, esaltano la rottura di altre molecole e la creazione di altri ioni, innescando anche in questo caso una scarica elettrica.

Il valore del campo elettrico K_r *in un dielettrico capace di produrre la scarica (quindi la massima intensità di campo elettrico sopportabile dal dielettrico) prende il nome di rigidità dielettrica.*

Essa dipende dalle condizioni ambientali di temperatura, pressione, umidita; valori tipici di rigidità dielettrica di alcuni materiali dielettrici sono riportati nella tabella precedente.

Nel caso dell'aria la rigidità dielettrica vale $K_{r,\,aria}$ = 3kV/mm ≡ 30kV/cm ≡ 3 MV/m. Essendo la distanza fra le armature del condensatore del nostro problema pari a d=4mm, se trascuriamo l'effetto dei bordi, ci aspettiamo la scarica fra le armature quando la tensione fra le stesse sarà di

$$V_{scarica,aria} = \mathrm{K_{r,aria}d} \ = 3_{[KV/mm]} \cdot 4_{[mm]} = \ 12 \text{ kV}$$

Nel caso del vetro invece, assumendo che questi riempia perfettamente lo spazio fra le armature e trascurando sempre l'effetto ai bordi, avremo (prendiamo $K_{r,\,vetro}$ = 50kV/mm)

$$V_{scarica,vetro} = \mathrm{K_{r,vetro}d} \ = 50_{[KV/mm]} \cdot 4_{[mm]} = \ 200 \text{ kV}$$

Approfondimento

Campo elettrico ai bordi – In più occasioni si è affermato di "trascurare l'effetto ai bordi" nello studio dei problemi precedenti, quando si trattava di esaminare il comportamento di campi elettrici, in particolare nelle considerazioni fatte sulla scarica nei dielettrici. Queste brevi note di approfondimento vogliono dare qualche spiegazione essenziale in merito a questo argomento.

Prima di tutto dobbiamo osservare che c'è una relazione fra la densità superficiale di carica σ_c [C/m^2] in un punto su un'armatura (o un corpo conduttore) e il campo elettrico K nel dielettrico difronte a quel punto. Allo scopo prendiamo l'equazione costitutiva del condensatore

$$Q=CV$$

ed esprimiamo carica e tensione in funzione della densità di carica e del campo elettrico, con riferimento ad un condensatore piano

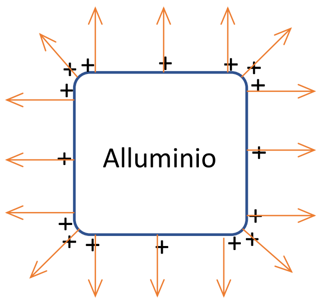
$$(\sigma_c\, S) = (\varepsilon \frac{S}{d})\,(K\, d)$$

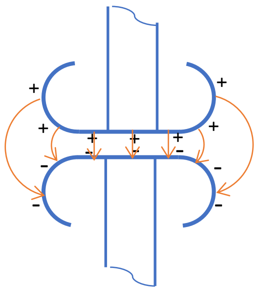
Fatte le dovute semplificazioni della superficie S e della distanza d, rimane

$$\sigma_c = \varepsilon\, K$$

Questa relazione, qui ricavata con riferimento ad un caso semplice, di fatto è di validità generale e si applica in tutti i punti di un corpo conduttore ove c'è la densità di carica σ_c e nel dielettrico affacciato, avente costante dielettrica ε, c'è il campo elettrico K, ortogonale alla superficie del conduttore.

Si prenda ad esempio un cubo di materiale conduttore (p.e. alluminio) a spigoli arrotondati mostrato in sezione nella figura sotto a sinistra. Se lo immaginiamo carico con cariche positive, queste, come sappiamo, si disporranno sulla superficie esterna del corpo e, nell'ottica di "stare più lontane possibile" (si respingono a vicenda) si concentreranno principalmente sugli spigoli ove si avrà allora una più alta densità di carica (in genere ciò succede dove gli angoli di curvatura sono piccoli). Di fronte agli spigoli allora si può avere un campo elettrico di intensità sufficiente per superare la rigidità dielettrica del dielettrico (per esempio aria) e si vedrebbe in quel caso un "effluvio" luminoso sugli spigoli dovuto alle scariche parziali in aria localizzate in quelle regioni.





Questo comportamento spiega perché i parafulmini sono appuntiti, dovendo creare un punto ove innescare la scarica e attirare l'eventuale fulmine.

Un condensatore piano non sarà allora realizzato con delle semplici piastre affacciate come esemplificato nei problemi che abbiamo affrontato, a meno che le tensioni in gioco non siano basse. In generale, per alta tensione, sarà realizzato come nella figura centrale sopra riportata. Anche i terminali saranno di ampie dimensioni (tubolari in generale) per lo stesso motivo.

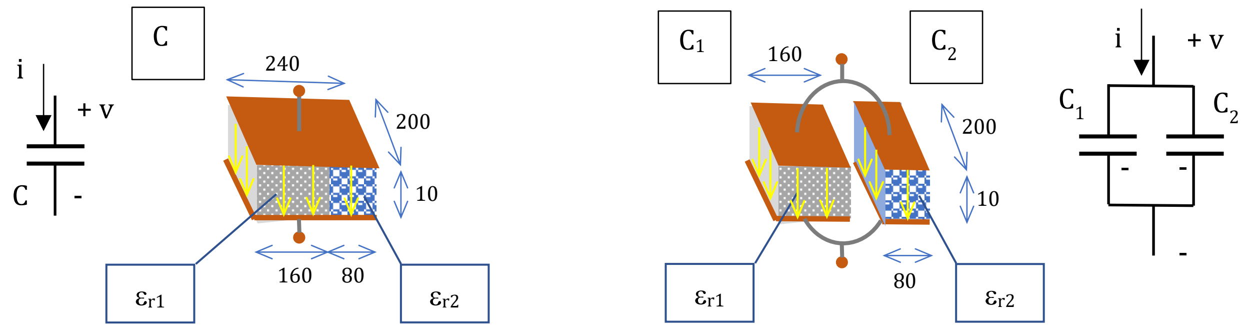
Nell'illustrazione a destra è riportato il dettaglio di un condensatore in aria facente parte di un'apparecchiatura di misura in una sala di collaudo in alta tensione.

Capitolo 9 -Applicazioni

9.1 Condensatori in parallelo, Partitore di corrente capacitivo

Problema 9.1: *Un condensatore piano C è realizzato con due armature rettangolari da 240 mm x 200 mm distanziate di 10 mm, come rappresentato nella figura sotto a sinistra (non in scala). Il volume fra le armature è riempito per una porzione della superficie di 160 mm x 200 mm con un materiale dielettrico avente costante dielettrica relativa ε_{r1} = 2, mentre la rimanente porzione di superficie 80 mm x 200 mm con un materiale dielettrico avente costante dielettrica relativa ε_{r2} = 3. Si chiede di calcolare:*

a) *La capacità C del condensatore.*
b) *La densità di carica sulle armature quando la tensione applicata è di 200 V costanti.*
c) *Il campo elettrico nei due dielettrici nelle condizioni suddette.*
d) *L'energia accumulata nel condensatore nelle condizioni suddette.*



Il condensatore C non ha dielettrico uniforme (stesse caratteristiche fisiche) in tutto il suo volume. La figura di sinistra mostra (assieme alla rappresentazione circuitale) anche alcune esemplificative linee di campo elettrico che vanno da un'armatura all'altra. Non ci sono linee di campo che attraversano la superficie di separazione fra i due dielettrici. Nulla cambia quindi se il condensatore lo immaginiamo "tagliato" in due parti come nella figura di centro, pur di mantenere equipotenziali le due porzioni di armature positiva e negativa, che appaiono in effetti strettamente collegate. La struttura è quindi assimilabile a *due condensatori C_1 e C_2 in parallelo, cioè sottoposti alla stessa tensione V* come si vede anche nello schema circuitale di destra. Le cariche sull'armatura positiva di ciascuno dei condensatori C_1 e C_2 saranno

$$Q_1 = C_1 V_1 = C_1 V$$
$$Q_2 = C_2 V_2 = C_2 V$$

e pertanto possiamo calcolare la carica totale sulle armature del condensatore C (positiva su una e negativa (uguale e contraria) sull'altra):

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2)V$$

Facendo il rapporto fra ciascuna carica parziale e la carica totale ricaviamo:

$$Q_1 = Q\frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

$$Q_2 = Q\frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

Derivando le due equazioni ripetto al tempo e ricordando che la derivata della carica è la corrente otteniamo:

$$i_1 = i\frac{C_1}{C_1 + C_2} \qquad partitore\ di\ corrente\ capacitivo$$

$$i_2 = i\frac{C_2}{C_1 + C_2} \qquad partitore\ di\ corrente\ capacitivo$$

che sono le formule del *partitore di corrente capacitivo*. La corrente totale *i* del parallelo di due condensatori si ripartisce fra i due condensatori in misura proporzionale alle loro capacità: il condensatore di capacità maggiore sarà interessato dalla frazione maggiore della corrente.

Dovendo valere per il condensatore *C* nel suo complesso l'equazione *Q= CV,* otteniamo, per confronto, che la capacità C sarà

$$C = C_1 + C_2$$

Se i condensatori in parallelo sono n, numerati da 1 a n, allora la formula da applicare è[4]:

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n \qquad capacità\ equivalente\ di\ n\ condensatori\ in\ parallelo$$

Applichiamola al nostro problema. Le singole capacità valgono:

$$C_1 = \varepsilon_o \varepsilon_{r1}\frac{S_1}{d} = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot \frac{0.16 \cdot 0.2}{0.01} = 56.67 \cdot 10^{-12}\, F \equiv 56.67\, pF$$

$$C_2 = \varepsilon_o \varepsilon_{r2}\frac{S_2}{d} = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot \frac{0.08 \cdot 0.2}{0.01} = 42.50 \cdot 10^{-12}\, F \equiv 42.50\, pF$$

e quindi la capacità totale della struttura data diventa:

$$C = C_1 + C_2 = 56.67 + 42.50 = 99.17\, pF$$

La carica elettrica accumulata, con diverso segno, sulle due armature con la tensione V=200V la calcoliamo con la:

$$Q = CV = 99.17 \cdot 10^{-12} \cdot 200 = 19.83 \cdot 10^{-9}\ C$$

[4] La capacità equivalente di più condensatori in parallelo è sempre maggiore della capacità più grande.

Se dividiamo tale carica per la totale superficie delle armature otteniamo la *densità media superficiale di carica*:

$$\sigma_{media} = \frac{Q}{S} = \frac{19.83 \cdot 10^{-9}}{0.24 \cdot 0.2} = 413.1 \cdot 10^{-9} \ \frac{C}{m^2}$$

La carica non è in questo caso uniformemente distribuita sulla superficie dell'armatura. Sulla porzione di superficie che compete al condensatore C_1 avremo la carica e la densità di carica:

$$Q_1 = C_1 V = 56.67 \cdot 10^{-12} \cdot 200 = 11.33 \cdot 10^{-9} \ C$$

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{S_1} = \frac{11.33 \cdot 10^{-9}}{0.16 \cdot 0.2} = 354.2 \cdot 10^{-9} \ \frac{C}{m^2}$$

Invece, sulla porzione di superficie che compete al condensatore C_2 avremo la carica e la densità di carica[5]:

$$Q_2 = C_2 V = 42.50 \cdot 10^{-12} \cdot 200 = 8.50 \cdot 10^{-9} \ C$$

$$\sigma_2 = \frac{Q_2}{S_2} = \frac{8.50 \cdot 10^{-9}}{0.08 \cdot 0.2} = 531.3 \cdot 10^{-9} \ \frac{C}{m^2}$$

Le due densità superficiali di carica si potevano ricavare anche ricordando che sulla superficie di un'armatura deve valere (vedi Capitolo 8) $\sigma = \varepsilon K$. Allora abbiamo per ciascuno dei due condesatori piani

$$\sigma_1 = \varepsilon_1 K_1 = \varepsilon_1 \frac{V}{d} = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot \frac{200}{0.01} = 354.2 \cdot 10^{-9} \ \frac{C}{m^2}$$

$$\sigma_2 = \varepsilon_2 K_2 = \varepsilon_2 \frac{V}{d} = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot \frac{200}{0.01} = 531.3 \cdot 10^{-9} \ \frac{C}{m^2}$$

Passiamo a qualche <u>considerazione energetica</u>. Con la tensione data l'energia accumulata nel condensatore C risulta:

$$W_C = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2}\, 99.17 \cdot 10^{-12} \cdot 200^2 = 1.983 \cdot 10^{-6} \ J$$

Anche questa può essere ripartita nei due condensatori C_1 e C_2:

$$W_{C1} = \frac{1}{2} C_1 V^2 = \frac{1}{2}\, 56.67 \cdot 10^{-12} \cdot 200^2 = 1.133 \cdot 10^{-6} \ J$$

$$W_{C2} = \frac{1}{2} C_2 V^2 = \frac{1}{2}\, 42.50 \cdot 10^{-12} \cdot 200^2 = 0.850 \cdot 10^{-6} \ J$$

[5] Notiamo che σ_{media} non è la media di σ_1 e σ_2 ma la media ponderata con le relative superfici:

$\sigma_{media}=(\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2)/(S_1+ S_2)=Q/S$.

Possiamo immaginare che le due energie calcolate siano accumulate nei volumi occupati rispettivamente dai condensatori C_1 e C_2. Può essere di interesse calcolare la *densità volumetrica (o volumica) di energia w_c*. Prendendo in esame un condesatore piano abbiamo in generale:

$$w_c = \frac{W_c}{Vol} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Vol} = \frac{\frac{1}{2}(\varepsilon_o \varepsilon_r \frac{S}{d})V^2}{Sd} = \frac{1}{2}(\varepsilon_o \varepsilon_r)\frac{V^2}{d^2} \qquad J/m^3$$

In definitiva:

$$w_c = \frac{1}{2}\varepsilon K^2 \qquad J/m^3 \qquad densità\ volumica\ di\ energia\ nel\ campo\ elettrico$$

che è una formula di validità generale: in un punto dello spazio ove c'è un campo elettrico di intensità K e una permettività ε, c'è una densità volumica di energia (energia specifica) data dalla formula che abbiamo trovato.

Per ciascuno dei volumi entro i nostri due condensatori troviamo:

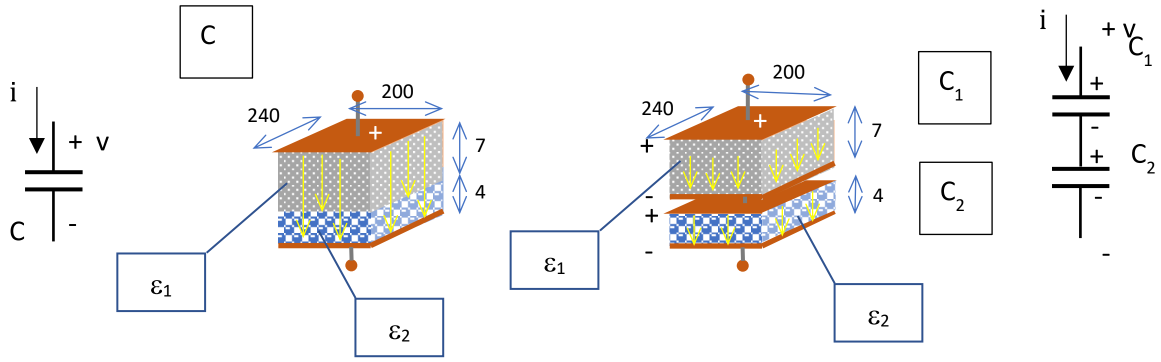
$$w_{c1} = \frac{1}{2}\varepsilon_1 {K_1}^2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_o \varepsilon_{r1})\frac{V^2}{d^2} = \frac{1}{2}\ (8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2) \cdot (\frac{200}{0.01})^2 = 3.542\ 10^{-3} \quad J/m^3$$

$$w_{c1} = \frac{1}{2}\varepsilon_2 {K_2}^2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_o \varepsilon_{r2})\frac{V^2}{d^2} = \frac{1}{2}\ (8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 3) \cdot (\frac{200}{0.01})^2 = 5.313\ 10^{-3} \quad J/m^3$$

9.2 Condensatori in serie – Partitore di tensione capacitivo

Problema 9.2: *Un condensatore piano è realizzato con due armature rettangolari da 240 mm x 200 mm distanziate di 11 mm, come rappresentato nella figura sotto a sinistra (non in scala). Il volume fra le armature è riempito per una porzione di 7 mm dello spessore con un materiale dielettrico avente costante dielettrica relativa ε_{r1} = 2, mentre il rimanete spessore di 4 mm con un materiale dielettrico avente costante dielettrica relativa ε_{r2} = 3. Si chiede di calcolare:*

a) *La capacità del condensatore*
b) *La densità di carica sulle armature quando la tensione applicata è di 200 V continua.*
c) *Il campo elettrico nei due dielettrici nelle condizioni suddette.*
d) *L'energia accumulata nel condensatore nelle condizioni suddette.*



Il condensatore C dato non ha dielettrico uniforme (stesse caratteristiche fisiche) in tutto il suo volume. La figura di sinistra mostra (assieme allo schema circuitale) anche alcune esemplificative linee di campo elettrico che vanno da un'armatura all'altra. Sono tutte linee di campo perpendicolari alla superficie delle armature, così come ad ogni altra superficie parallela a queste e, in particolare alla superficie di separazione fra i due dielettrici. Ciascuna di queste superfici è una superficie equipotenziale, come fosse una superficie metallica, perché ogni suo punto è separato da una delle armature da una uguale lunghezze di linea di campo. Nulla cambia quindi se il condensatore lo immaginiamo "tagliato" in due parti come nella figura di centro, trasformando la superficie di separazione fra i dielettrici in una coppia di armature (fittizie) elettricamente collegate, una che realizza il condensatori C_1 con l'armatura superiore e una che realizza il condensatori C_2 con l'armatura inferiore. La struttura è quindi assimilabile a *due condensatori C_1 e C_2 in serie, cioè sottoposti alla stessa corrente e quindi alle stesse cariche sulla armature (con il segno appropriato)* come si vede anche nello schema circuitale di destra. Detta Q la carica comune su ciascuno dei condensatori vi sarà la tensione

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q}{C_1}$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C_2}$$

e pertanto possiamo calcolare la tensione totale sulla serie

$$V = V_1 + V_2 = Q(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2})$$

Dovendo valere per il condensatore nel suo complesso l'equazione V= Q/C otteniamo, per confronto, che la capacità C risulterà da:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Se i condensatori in serie sono n, numerati da 1 a n, allora la formula da applicare è[6]

[6] Nel caso di due soli condensatori la formula può semplificarsi in $C = C_1 C_2/(C_1 + C_2)$.

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n} \qquad capacità\ equivalente\ di\ n\ condensatori\ in\ serie$$

Applichiamola al nostro problema. Le singole capacità valgono:

$$C_1 = \varepsilon_o \varepsilon_{r1} \frac{S}{d_1} = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot \frac{0.24 \cdot 0.2}{0.007} = 121.4 \cdot 10^{-12}\, F \equiv\ 121.4\, pF$$

$$C_2 = \varepsilon_o \varepsilon_{r2} \frac{S}{d_2} = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot \frac{0.24 \cdot 0.2}{0.004} = 318.7 \cdot 10^{-12}\, F \equiv\ 318.7\, pF$$

e quindi la capacità totale della struttura data diventa[7]:

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{121.4 \cdot 318.7}{121.4 + 318.7} = 87.91\, pF$$

La carica elettrica accumulata sulle armature (reali e fittizie), con segno alterno (vedi figura), con la tensione V=200V la calcoliamo con la:

$$Q = CV = 87.91 \cdot 10^{-12} \cdot 200 = 17.58 \cdot 10^{-9}\ C$$

Se dividiamo tale carica per la superficie delle armature otteniamo la *densità superficiale di carica*:

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{17.58 \cdot 10^{-9}}{0.24 \cdot 0.2} = 366.3 \cdot 10^{-9}\ \frac{C}{m^2}$$

comune a tutte le armature (con il segno opportuno).

La tensione V risulta ripartita sui due condensatori in serie. Sul condensatore C_1 avremo la tensione (vedi formula già scritta sopra):

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{CV}{C_1} = \frac{V}{C_1} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Fatte le lecite semplicazioni (ed ripetendo il ragionamento anche al condensatore C_2) troviamo le formule del partitore di tensione capacitivo:

$$V_1 = V\ \frac{C_2}{C_1 + C_2} \qquad formula\ del\ partitore\ di\ tensione\ capacitivo$$

$$V_2 = V\ \frac{C_1}{C_1 + C_2} \qquad formula\ del\ partitore\ di\ tensione\ capacitivo$$

[7] La capacità equivalente di più condensatori in serie è sempre minore della capacità più piccola.

Applicata la tensione V a due condensatori in serie essa si ripartisce fra i due condensatori in proporzione inversa alle loro capacità (sul condensatore di capacità minore cade la frazione maggiore di tensione).

Nel caso in esame otteniamo:

$$V_1 = V \, \frac{C_2}{C_1 + C_2} = 200 \frac{318.7}{121.4 + 318.7} = \; 144.8 \quad V$$

$$V_2 = V \, \frac{C_1}{C_1 + C_2} = 200 \frac{121.4}{121.4 + 318.7} = \; 55.17 \quad V$$

Conseguentemente possiamo calcolare i campi elettrici nei due dielettrici

$$\mathrm{K}_1 = \frac{V_1}{d_1} = \frac{144.8}{0.007} = \; 20.69 \quad 10^{+3} \quad V/m$$

$$\mathrm{K}_2 = \frac{V_2}{d_2} = \frac{55.17}{0.04} = \; 13.79 \quad 10^{+3} \quad V/m$$

Per verifica possiamo ricalcolare le stesse grandezze con le formule che legano campo elettrico e densità di corrente (la densità di carica è comune a tutte le armature):

$$\mathrm{K}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} = \frac{366.3 \cdot 10^{-9}}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2} = \; 20.69 \quad 10^{+3} \quad V/m$$

$$\mathrm{K}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_2} = \frac{366.3 \cdot 10^{-9}}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 3} = \; 13.79 \quad 10^{+3} \quad V/m$$

Passiamo alle considerazioni energetiche. Con la tensione data l'energia accumulata risulta:

$$W_C = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \, 87.91 \cdot 10^{-12} \cdot 200^2 = 1.758 \cdot 10^{-6} \quad J$$

Anche questa può essere ripartita nei due condensatori C_1 e C_2:

$$W_{C1} = \frac{1}{2} C_1 {V_1}^2 = \frac{1}{2} \, 121.4 \cdot 10^{-12} \cdot 144.8^2 = 1.273 \cdot 10^{-6} \quad J$$

$$W_{C2} = \frac{1}{2} C_2 {V_2}^2 = \frac{1}{2} \, 318.7 \cdot 10^{-12} \cdot 55.17^2 = 0.4850 \cdot 10^{-6} \quad J$$

Le due energie calcolate sono accumulate nei volumi occupati rispettivamente dai condensatori C_1 e C_2, per ognuno dei quali si può calcolare la densità volumica di energia w_c seguendo un procedimento analogo a quello percorso nel precedente Problema 9.1 (svolgere autonomamente).

9.3 Partitore di tensione capacitivo per misure in media/alta tensione

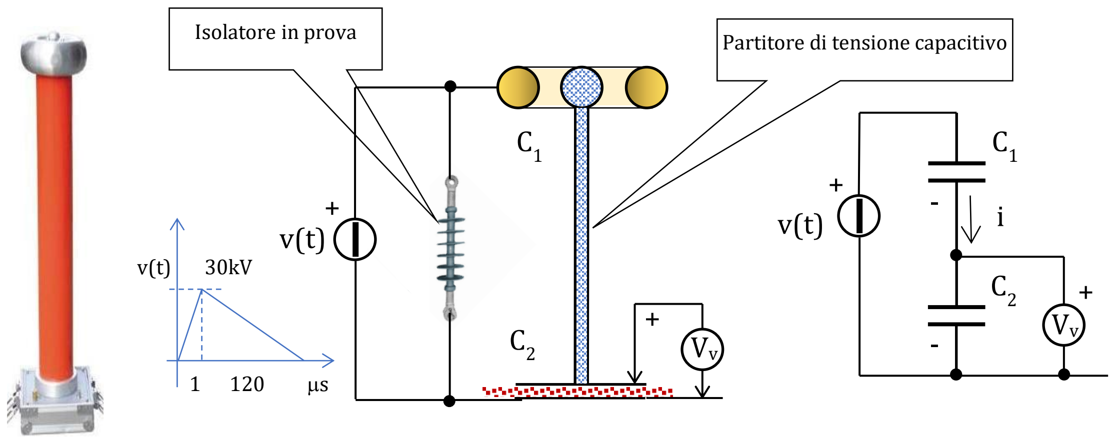
Problema 9.3: *Per il collaudo degli isolatori (o altri componenti) da impiegare negli impianti in media tensione (MT) o alta tensione (AT) si applicano delle tensioni impulsive di forma d'onda stabilita dalle norme. La figura sotto mostra il profilo di una tale tensione, stilizzato e semplificato: in 1 μs la tensione va da zero a 30 kV e poi in 120 μs ritorna linearmente a zero. Tali forme d'onda sono prodotte da specifico generatori realizzato allo scopo; nella figura centrale sotto, esso è rappresentato con un generatore ideale di tensione, in parallelo al quale è posto l'isolatore in prova.*

La tensione di prova non è direttamente misurabile. Al fine di misurarla si può impiegare un partitore capacitivo di tensione, il cui principio è stato introdotto nel precedente Problema 9.2. Il condensatore C_1 è realizzato in aria con un'armatura a forma sferica circondata da una seconda armatura a forma toroidale a sezione circolare (la forma di un salvagente). Le forme arrotondate sono scelte per eliminare qualsiasi presenza di spigoli e bordi che potrebbero causare scariche elettriche locali (vedi Capitolo 8.). Il condensatore C_2 del partitore lo possiamo immaginare piano con un dielettrico disposto fra due armature circolari. I due condensatori sono collegati dall'asta metallica che sostiene l'armatura sferica di C_1 realizzando così lo schema circuitale di misura di destra.

La foto di sinistra illustra un reale partitore di tensione capacitivo per media tensione; la sua altezza può essere di alcuni metri.

Supponiamo che sia C_1 = 20 pF[8] *e che C_2 sia realizzato con due piastre in alluminio, circolari, con diametro di 450 mm, fra le quali è interposto un foglio di materiale dielettrico di spessore d=0.3 mm e costante dielettrica relativa ε_r = 3.5.*

Vogliamo trovare l'andamento della tensione misurata dal voltmetro ideale V_v (o dal sistema di acquisizione/registrazione della tensione) collegato fra le armature del condensatore C_2.



Al di là degli aspetti spettacolari, questo Problema è di facile soluzione. Si tratta in definitiva di studiare il partitore di tensione capacitivo mostrato a destra nella figura. Secondo la regola del partitore capacitivo la tensione sul voltmetro ideale sarà:

$$v_v(t) = v_{C2}(t) = v(t)\ \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

[8] Il calcolo della capacità di un condensatore con la geometria data non è di semplice esecuzione analitica.

per conoscere la quale bisogna ricavare C_2. Questo è un condensatore piano per il quale scriviamo:

$$C_2 = \varepsilon_o \varepsilon_r \frac{S}{d} = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 3.5 \cdot \frac{\frac{\pi \cdot 0.45^2}{4}}{0.3 \cdot 10^{-3}} = 16.43 \cdot 10^{-9}\, F \equiv 16.43 \; nF$$

Allora abbiamo:

$$\frac{v_v}{v} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{20 \cdot 10^{-12}}{20 \cdot 10^{-12} + 16.43 \cdot 10^{-9}} = 1.216 \cdot 10^{-3} \equiv \frac{1}{822.5}$$

La tensione sul voltmetro è pertanto proporzionale (stessa forma d'onda) alla tensione di prova applicata al partitore (e all'isolatore), ma 822.5 volte piu piccola. Il suo valore di picco sarà quindi 30000/822.5 = 36.47 V, facilmente misurabile senza pericolo per l'operatore: in 1 μs la tensione va da zero a 36.47 V e poi nei succesivi 120 μs ritorna linearmente a zero. Per ottenere questo risultato di riduzione della tensione, si è progettato un condensatore C_2 di capacità molto maggiore di quella di C_1 (quasi 1000 volte) ricordando la regola del partitore di tensione capacitivo che sul condesatore di capacità maggiore cade la frazione più piccola di tensione.

Per completezza possiamo calcolare la tensione su C_1:

$$v_{C1} = v - v_v = v \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cong v$$

Il condensatore C_1 quindi è sottoposto all'intera tensione di prova (appena un po' meno) e questo giustifica la configurazione in aria con armature a forme arrotondate scelta per C_1.

Possiamo anche calcolare qual è la corrente che percorre il partitore di tensione durante la prova di collaudo, sottoposto alla tensione v(t) con il profilo dato.

La sua capacità equivalente è quella di due condensatori in serie:

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{20 \cdot 10^{-12} \cdot 16.43 \cdot 10^{-9}}{20 \cdot 10^{-12} + 16.43 \cdot 10^{-9}} \cong 20 \cdot 10^{-12} \quad F$$

Allora nel primo microsecondo si avrà

$$i = C \frac{dv(t)}{dt} = 20 \cdot 10^{-12} \frac{30 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^{-6}} = 0.6 \;\; A \quad (costanti)$$

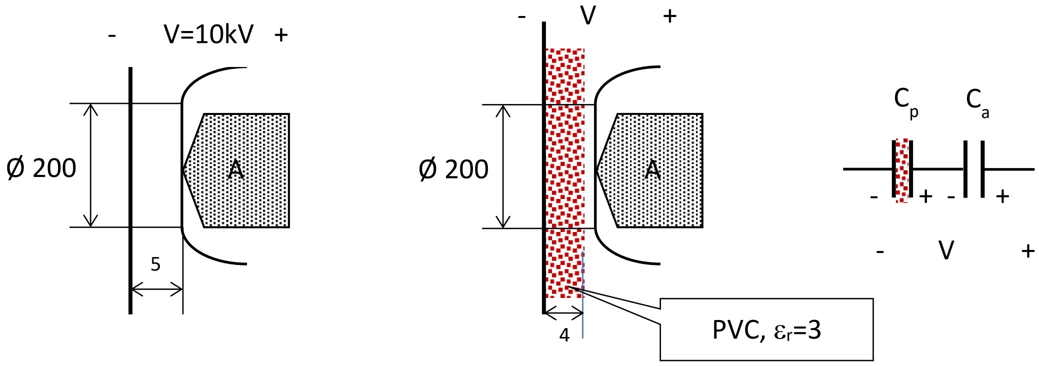
mentre nei successivi 120 microsecondi

$$i = C \frac{dv(t)}{dt} = 20 \cdot 10^{-12} \frac{(-30) \cdot 10^3}{120 \cdot 10^{-6}} = -0.005 \;\; A \;\; \equiv -5\, mA \;\; (costanti)$$

9.4 Coordinamento degli isolamenti

Problema 9.4: *All'interno di un armadio metallico contenente un apparecchiatura elettrica industriale (potrebbe essere un quadro elettrico in MT, oppure l'armadio di un essiccatorio industriale a microonde) c'è una parte A dell'apparecchiatura che si trova alla tensione di V=10 kV rispetto alla parete. Vista la sua forma verso la parete, per evitare "effetti parafulmine", essa è coperta con un'armatura metallica circolare dal diametro di 200 mm, a bordi ripiegati (svasati) come mostra la figura sottostante a sinistra. Fra tale armatura e la parete rimane uno spazio d in aria di soli 5 mm.*

1^ Parte: si chiede di valutare se tale spessore di 5 mm è sufficiente per evitare la scarica elettrica fra apparecchiatura e parete dell'armadio.



La prima parte del Problema richiede di verificare se il campo elettrico che si viene a creare fra parete dell'armadio e armatura che "addolcisce" (rende meno spigolosa) la forma della parte A dell'apparecchiatura verso la parete, sia inferiore o superiore alla rigidità dielettrica dell'aria.

Siccome conosciamo la tensione che sussiste fra aramtura e parete, il campo elettrico lo calcoliamo facilmente con la

$$K = \frac{V}{d} = \frac{10000}{5_{[mm]}} = 2000\, V/mm \equiv 20\, kV/cm$$

Abbiamo visto che la rigidità dielettrica dell'aria è di 3kV/mm ≡ 30 kV/cm (v. Capitolo 8). Possiamo allora affermare che lo spessore di 5 mm appare sufficiente per evitare la scarica, in condizioni di aria secca e pulita.

Tuttavia il margine di sicurezza non è grande e la possibile presenza nell'aria di umidità (e/o di pulviscolo) potrebbe far innescare la scarica. Allora, nell'ottica di avere maggiore garanzia di buon isolamento, si pensa di inserire fra armatura e parete una lastra di PVC ($\varepsilon_r = 3$) dallo spessore $d_p = 4$ mm.

2^ Parte: si chiede di valutare quanto questa soluzione combinata PVC-aria sia migliorativa per evitare la scarica elettrica fra apparecchiatura e parete dell'armadio.

Ciò che si è venuto a creare è ancora un condensatore a due dielettrici (v. Problema 9.2), ovvero due condensatori in serie uno (C_p) con dielettrico PVC e uno (C_a) con dielettrico aria. Calcoliamo le due capacità:

$$C_p = \varepsilon_o \varepsilon_r \frac{S}{d_p} = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot \frac{\frac{\pi \cdot 0.2^2}{4}}{4 \cdot 10^{-3}} = 209.6 \cdot 10^{-12}\ F \equiv 209.6\ pF$$

$$C_a = \varepsilon_o \varepsilon_r \frac{S}{d_a} = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot \frac{\frac{\pi \cdot 0.2^2}{4}}{1 \cdot 10^{-3}} = 278.2 \cdot 10^{-12}\ F \equiv 278.2\ pF$$

La tensione V=10 kV si ripartisce fra i due condensatori secondo le seguenti frazioni (partitore di tensione):

$$V_p = V\ \frac{C_a}{C_p + C_a} = 10000 \frac{278.2}{209.6 + 278.2} = 5703\ \ V$$

$$V_a = V\ \frac{C_p}{C_p + C_a} = 10000 \frac{209.6}{209.6 + 278.2} = 4297\ \ V$$

cui corrispondono i campi elettrici

$$\mathrm{K}_p = \frac{V_p}{d_p} = \frac{5703}{4} = 1426\ \ V/mm$$

$$\mathrm{K}_a = \frac{V_a}{d_a} = \frac{4297}{1} = 4297\ \ V/mm \equiv 42.97\ kV/cm$$

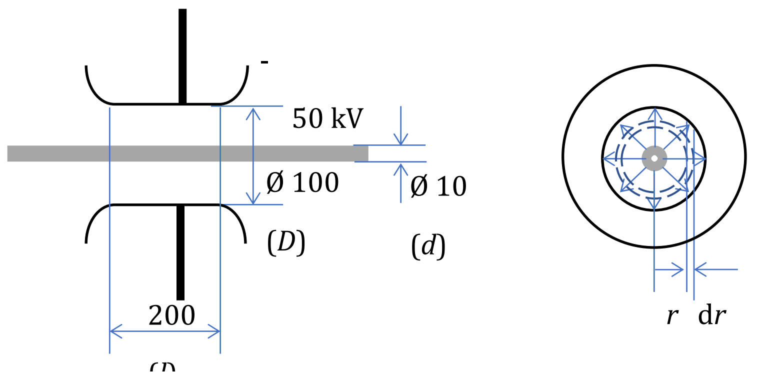
Triviamo pertanto che non c'è nessun problema per il PVC che è sollecitato con un campo elettrico molto inferiore alla sua rigidità dielettrica, <u>ma il campo elettrico nello spessore di 1 mm di aria è superiore alla rigidità dielettrica e pertanto quello spessore d'aria sarà soggetto a scarica certa</u>! La scarica non sarà inizialmente perforante, ma solo fra la l'armatura metallica e superficie del PVC (effetto corona), ma per combustione ed erosione del PVC e produzione di fumi e particelle volatili si giungerà rapidamente ad una scarica dalla parete all'armatura. L'intervento presunto migliorativo è quindi deleterio!

9.5 Isolatore passante

Problema 9.5: *Una barra rotonda di rame dal diametro d=10 mm, sottoposta a tensione elettrica, deve attraversare una parete metallica. La barra è alla tensione di 50 kV rispetto alla parete. Per attraversare la parete, viene praticato un foro poi contornato da un'armatura cilindrica lunga l=200mm con i bordi svasati (ripiegati) per evitare concentrazioni di linee di campo elettrico (effetto bordi). Il foro interno dell'armatura ha un diametro D= 100 mm. La struttura è descritta nella figura sottostante di sinistra.*

Si chiede di:

a) Valutare la capacità fra barra di rame e parete
b) Valutare se la soluzione è idonea per evitare la scarica elettrica fra barra e parete.



La struttura realizza un condesantore cilindrico, cioè un condensatore le cui armature sono due cilindri coassiali, in questo caso costituiti dalla barra di rame e dall'armatura cilindrica fissata alla parete. Le linee di campo sono radiali, come mostra la vista assiale di destra. La distanza fra le armature è pari alla differenza dei raggi, ma la superficie delle due armature è diversa e la stessa superficie attraversata dalle linee di campo varia lungo la linea di campo stessa andando da un'armatura all'altra. Non siamo quindi nelle condizioni per applicare la formula del condensatore piano.

Il condensatore cilindrico lo possiamo però immaginare come la serie infinita di condensatori le cui armature hanno raggio r e distanza dr. Assumiamo pari a *l* la lunghezza delle armature. Il reciproco della capacità equivalente di una serie di condensatori si ottiene sommando i reciproci delle singole capacità. In questo caso i condensatori in serie sono infiniti e il reciproco di ciascuna capacità è infinitesimo per cui useremo un integrale al posto della sommatoria

$$\frac{1}{C} = \int_{d/2}^{D/2} \left(\frac{\mathrm{d}r}{\varepsilon_o \varepsilon_r (2\pi r l)} \right)$$

dove 2πrl è la superficie dell'armatura generica di raggio *r* e d*r* la distanza fra le armature. Il risultato del calcolo porta a :

$C = \dfrac{\varepsilon_o \varepsilon_r \, 2\pi l}{ln \dfrac{D}{d}}$ *capacità di un C cilindrico di lunghezza l e diametri esterno D e interno d*

Nel nostro caso risulta:

$$C = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_r \, 2\pi l}{ln \dfrac{D}{d}} = \frac{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 2\pi \cdot 0.2}{ln \dfrac{0.1}{0.01}} = 4.832 \;\; 10^{-12} \, F$$

Per verificare l'idoneità a sostenere la tensione senza il manifestarsi di una scarica dobbiamo calcolare il campo elettrico e confrontarlo con la rigidità dielettrica dell'aria. Una risposta frettolosa potrebbe essere affermativa osservando che lo spazio d'aria fra le due armature è di 4.5 cm (differenza dei raggi) e l'aria sostiene 30 kV/cm.

Il campo elettrico non è però uniforme: esso è più intenso vicino alla barra (raggio piccolo) che vicino all'armatura, come si vede anche dalla figura precedente a destra ove le linee del campo sono più rade all'armatura esterna che alla superficie della barra. Il campo lo possiamo provare calcolando dapprima la densità di carica sulle armature con la tensione V=50 kV. La carica sulle armature sarà:

$$Q = CV = 4.832\ \ 10^{-12} \cdot 50 \cdot 10^{3} = 0.2416\ \cdot\ 10^{-6}\quad C$$

La densità di carica sull'armatura esterna e su quella interna allora diventano:

$$\sigma_e = \frac{Q}{\pi D l} = \frac{0.2416\ \cdot\ 10^{-6}}{\pi \cdot 0.1 \cdot 0.2} = 3.845\ \cdot\ 10^{-6}\quad C/m^2$$

$$\sigma_i = \frac{Q}{\pi d l} = \frac{0.2416\ \cdot\ 10^{-6}}{\pi \cdot 0.01 \cdot 0.2} = 38.45\ \cdot\ 10^{-6}\quad C/m^2$$

e di conseguenza i campi elettrici

$$\mathrm{K}_e = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_o} = \frac{3.845\ \cdot\ 10^{-6}}{8.854 \cdot 10^{-12}} = 4.343 \cdot 10^{5}\ V/m = 4.343\ kV/cm$$

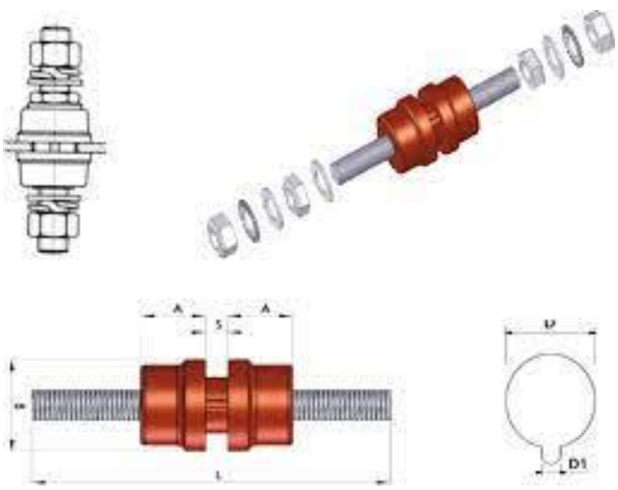
$$\mathrm{K}_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_o} = \frac{38.45\ \cdot\ 10^{-6}}{8.854 \cdot 10^{-12}} = 43.43 \cdot 10^{5}\ V/m = 43.43\ kV/cm$$

Constatiamo che il campo elettrico in prossimità della barra supera ampiamente la rigidità dielettrica dell'aria (30 kV/cm) e quindi in quella zona si avranno scariche elettriche localizzate (*effetto corona*) che a causa della produzione di ioni e sostanze volatili potranno diffondersi fino all'armatura esterna.

Concludiamo che la configurazione progettata non è idonea per consentire l'attraversamento della parete da parte della barra alla tensione di 50 kV.

Come modificarla per soddisfare il corretto funzionamento? Possimao immaginare almeno tre approcci.

Soluzione a) – E' quella ingegneristicamente più ragionevole: sostituiamo l'aria fra le due armature con un materiale avente maggiore rigidità dielettrica, come per esempio la ceramica o la resina epossidica, dedicando particolare attenzione alle problematiche esposte nel Problema 9.4. Ciò che otteniamo è un *isolatore passante* del quale nella figra sottostante sono mostrate due configurazioni prese da cataloghi commerciali (quella di destra si realizza per tensioni fino a 30 kV e più e per correnti fino a 2000 A; quella di sisnistra per tensione più basse)



Soluzione b) – Aumentare il diametro del foro passante prendendo valoro maggiori degli attuali circa 100 mm, fermo restando tutto il verso. Così diminuisce la capacità, quindi la carica elettrica, quindi il campo elettrico. Possiamo verificare (si invita a farlo) che è necessario diametro di valore ragionevolmente inaccettabile.

Soluzione c) – Aumentare entrambi i diametri delle due armature. Così diminuisce la densità di carica e quindi il campo elettrico. Possimao verificare (si invita a farlo) che con un diametro interno di 100 mm e un diametro esterno di 200 mm il campo elettrico è inferiore alla rigidità elettrica dell'aria con buon margine di sicurezza.