PARTE D
Circuiti in regime sinusoidale
Circuiti monofase

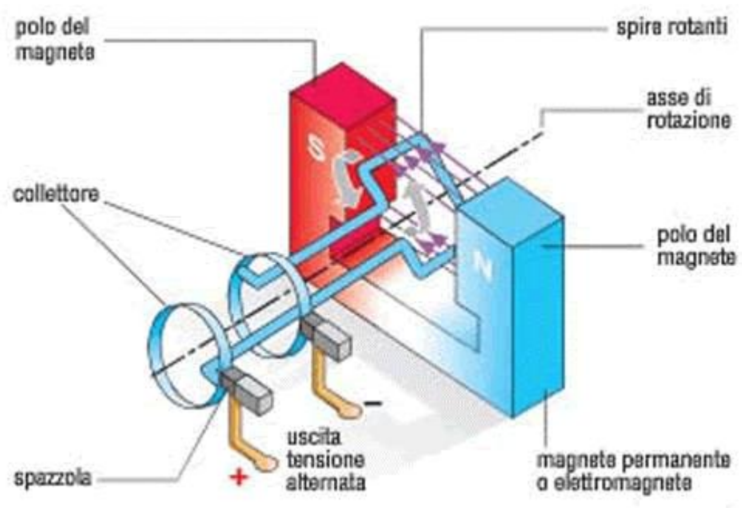
Premessa – Questa parte delle dispense è dedicata ai circuiti in regime periodico sinusoidale, che è un caso particolare del più generico regime periodico, del quale si farà qualche cenno.

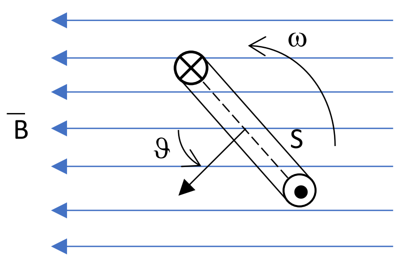
Affrontiamo prima il caso dei circuiti monofase, di interesse quasi tutte le applicazioni domestiche e molte di quelle commerciali e industriali.

Capitolo 14 - Generatore di tensione sinusoidale

14.1 Generatore di tensione sinusoidale monofase

Problema 14.1: *Assumendo che il campo di induzione magnetica $\bar{B}$ fra le due espansioni polari della struttura mostrata in figura sia uniforme, determinare l'espressione della tensione che si manifesta ai terminali del circuito a sagoma rettangolare, in rotazione alla velocità angolare ω costante, e avente superficie piana delimitata dai suoi lati pari a S.*





La nascita di una tensione ai morsetti, pari alla fem indotta nel circuito, deriva dal fatto che il flusso concatenato dal circuito stesso è variabile nel tempo a causa del suo movimento di rotazione nel campo magnetico uniforme e stazionario. Precisamente sappiamo che vale, scegliendo i giusti versi positivi di orientamento:

$$v = e = -\frac{d\emptyset_c}{dt}$$

Il flusso concatenato è legato al numero di line di B che attraversano (concatenano appunto) il circuito. Con l'aiuto della figura di destra, vediamo che tale numero è massimo quando ϑ=0°, è nullo quando ϑ=90° poi ancora massimo negativo (cioè attraversano la superficie con verso contrario a quello del versore $\bar{n}$ di orientamento di S) per ϑ=180° e così via.

Il massimo flusso concatenato (con ϑ=0°) è facilmente valutabile essendo il campo uniforme e ortogonale alla superficie. Lo possiamo scrivere come:

$$\emptyset_M = NSB$$

assumendo, per generalità, che il circuito rettangolare di superficie S sia formato da N spire identiche, in serie fra loro (bobina di N spire) e facenti capo ai due terminali.

In definitiva possiamo scrivere:

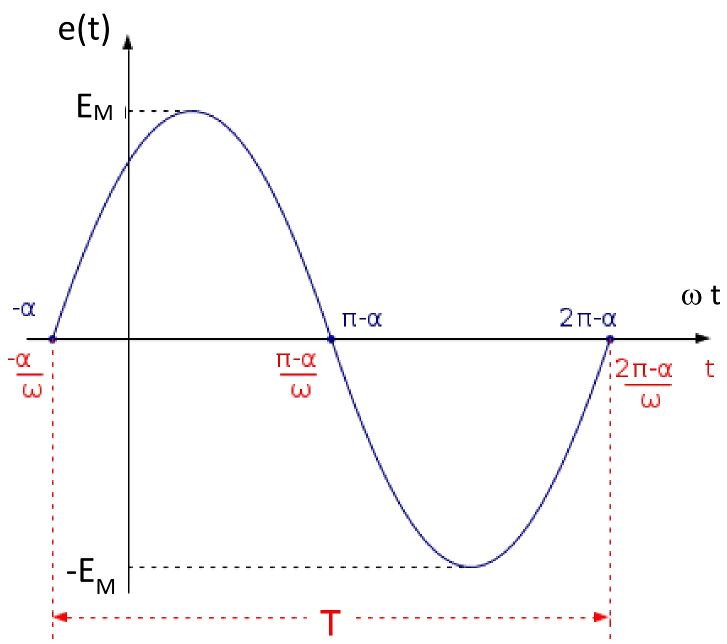
$$\emptyset_c = \emptyset_M \cos \vartheta = NSB \cos(\omega t + \alpha)$$

immaginando che nell'istante t=0 la posizione (iniziale) $\vartheta(0)$ sia pari ad α.

La tensione ai morsetti vale quindi

$$v(t) = e(t) = -\frac{d\emptyset_c}{dt} = \omega NSB \sin(\omega t + \alpha) = E_M \sin(\omega t + \alpha)$$

Essa ha un andamento periodico come quello mostrato (per un breve porzione del tempo) nella figura sottostante. Il valore massimo E_M dipende da parametri fisico-geometrici, ma è anche linearmente proporzionale alla velocità di rotazione. Sono usate in figura due diverse variabili sull'asse orizzontale: il tempo t (scala rossa, in secondi) o l'angolo ωt (scala nera, in radianti). Sono entrambe lecite e si può usare l'una o l'alta secondo convenienza.



14.2 Grandezze caratteristiche delle tensioni e correnti sinusoidali

Possiamo riconoscere dalla figura alcune caratteristiche ed alcuni aspetti che sono di uso e interesse pratici. Le loro definizioni sono valide per ogni grandezza periodica non solo per la tensioni o fem in esame.

a) La forma d'onda è periodica e ripete il suo andamento con <u>periodicità T</u> (*e(t) = e(t+nT) per ogni n intero*). L'intervallo T è detto *periodo* [s] della grandezza sinusoidale. Esso è l'intervallo di tempo per il quale l'argomento della funzione sinusoidale aumenta di un angolo giro cioè

$$\omega T = 2\pi \quad ossia \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad [rad/s]$$

La grandezza ω prende il nome di *pulsazione o frequenza angolare* e si misura in radianti al secondo [rad/s] o secondi^{-1} [s^{-1}].

b) Il <u>numero di periodi che stanno nell'unità di tempo</u> prende il nome di *frequenza f* che quindi è definita dalla

$$f = \frac{1}{T} \qquad [Hz]$$

e si misura in *hertz [Hz]* o, più raramente *periodi (cicli) al secondo* [p/s o pps].

c) Si riconosce che sussistono anche le relazioni

$$\omega = 2\pi f \qquad ovvero \quad f = \frac{\omega}{2\pi} \qquad ed\ anche \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

d) La quantità $\vartheta = \omega t + \alpha$ prende il nome di *fase istantanea*.

e) La forma d'onda ha <u>valore medio nullo</u> su un intervallo di lunghezza T (ed anche su nT):

$$E_{media} = \int_t^{t+T} e(t)\, dt = 0$$

Si dice che è una *grandezza periodica <u>alternata</u>.*

f) Come tutte le grandezze periodiche essa presenta anche ad un suo *valore efficace* che per definizione è (con riferimento alla e(t))

$$E_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} e(t)^2\, dt} = E > 0$$

Esso corrisponde alla radice del <u>valor medio su un periodo del quadrato della grandezza periodica</u> ed è sempre diverso da zero (a meno che la grandezza non sia identicamente nulla) e positivo.

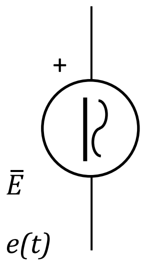
g) Nel <u>caso delle grandezze sinusoidali</u>, svolto l'integrale sopra, troviamo la <u>relazione</u>

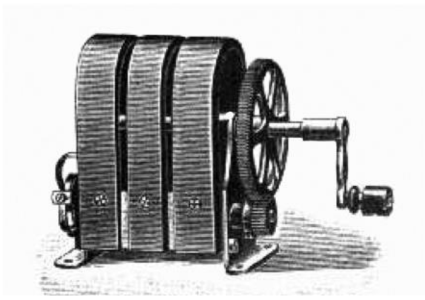
$$E = \frac{E_M}{\sqrt{2}}$$

Nella sostanza abbiamo visto con questo Problema la possibilità di realizzare un *generatore ideale di tensione sinusoidale* avente fem e(t), nella pratica detto anche *alternatore (monofase)"*. Per esso resta valido il simbolo del generatore ideale, ma spesso si usa il simbolo sotto a sinistra.

A destra invece è mostrata una realizzazione pratica, molto simile strutturalmente a quella presa in esame, ricavata da uno storico brevetto che ne rivendicava l'invenzione. Si tratta di un alternatore portatile a manovella, a tre magneti (che costituiscono il cosiddetto *induttore*), per impianti radiotelefonici, spesso mostrato in film storici di guerra. Un moltiplicatore di giri fra manovella e avvolgimento rotante (detto *indotto*) consente di avere alta velocità di rotazione dell'indotto con ragionevoli velocità della manovella.

Alternatori monofase si realizzano anche oggigiorno (in genere di potenza limitata); per motivi di praticità funzionale, solitamente l'indotto è fisso e si mette invece in rotazione l'induttore.



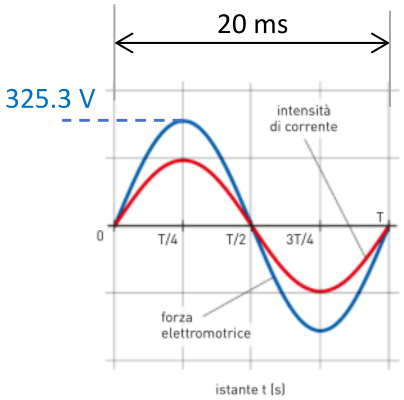


14.3 Generatore di tensione sinusoidale su carico resistivo

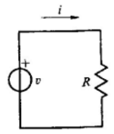
Problema 14.2: *Una stufetta elettrica è realizzata con un filo di manganina avvolto su un supporto di ceramica così da formare una resistenza R=50 Ω. La stufetta è alimentata dalla tensione domestica della rete elettrica pubblica di distribuzione dell'energia elettrica, avente V=230 V e f= 50 Hz.*

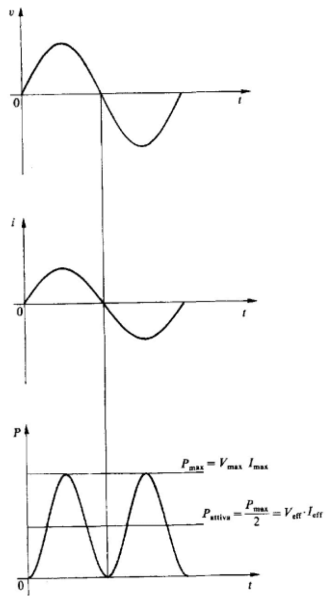
Vogliamo trovare:

a) *La forma d'onda della tensione*
b) *La forma d'onda della corrente*
c) *La potenza istantanea e media assorbita*
d) *L'energia elettrica consumata in un'ora di funzionamento*



Tensione della rete domestica a 230 V, 59 Hz





a) La forma d'onda della tensione applicata alla stufetta, è quella sinusoidale fornita alla presa elettrica a cui essa è allacciata. E' come se "dietro la presa" ci fosse una generatore (in prima approssimazione ideale) con fem sinusoidale della forma d'onda definita nel precedente Problema. È mostrata nella figura (a sinistra) qui sopra in blu, assumendo fase iniziale nulla:

$$v(t) \;=\; V_M\, sin(\omega t\,)$$

Il valore standard per la tensione domestica in Europa è fissato a 230 V (quasi ovunque; 220 V in alcuni stati). Quando si specifica la tensione di un sistema "in alternata", se non si fanno altre specificazioni, si intende per convenzione il valore efficace. Simile regola convenzionale vale per le correnti alternate.

Quindi 230 V è il valore efficace e di conseguenza il valore massimo della forma d'onda sinusoidale sarà

$$E_M = \sqrt{2} \cdot 230 = 325.3 \text{ V.}$$

La frequenza f della rete di distribuzione pubblica è per tutta l'Europa (la rete è unica) pari a 50 Hz[1] (50 cicli al secondo). Possiamo allora valutare il periodo T di ciascun ciclo che risulta:

$$T = 1/f = 1/50 = 0.020 \text{ s} \equiv 20 \text{ ms}$$

come indicato in figura. La pulsazione (frequenza angolare) invece risulta:

$$\omega = 2\pi f = 100\ \pi = 314.2 \quad \text{rad/s}$$

b) Possiamo passare alla corrente. Ovviamente per il resistore vale la legge di Ohm sicché

$$i(t) = v(t)/R$$

[1] Sono ammesse tolleranze rispetto a questo valore (p.es ±0.5 Hz), ma è garantito il valor medio sull'anno. Quindi in 365 giorni si hanno esattamente 365g*24h/g*3600s/h*50p/s=1.576.800.000 periodi (cicli). Un orologio sincronizzato con la frequenza della rete domestica non ha errore sull'anno!

che ci porta ad affermare facilmente che la corrente sarà:

$$i(t) \ = \ \frac{V_M}{R} \ sin(\omega t \ ) = \ I_M \ sin(\omega t \ )$$

La corrente riproduce esattamente lo stesso andamento della tensione: si dice che *la corrente in una resistenza in regime sinusoidale è in fase con la tensione.* Il suo andamento è mostrato dalla curva rossa nella precedente figura.

La corrente è *isofrequenziale* con la tensione *(stessa frequenza f , frequenza angolare ω e periodo T)*, è in *fase con la tensione* e la sua ampiezza rispetta le seguenti relazioni (la seconda dividendo entrambi i membri della prima per √2):

$$I_M \ = \ \frac{V_M}{R} \qquad legge \ di \ Ohm \ fra \ i \ valori \ massimi$$

$$I \ = \ \frac{V}{R} \qquad legge \ di \ Ohm \ fra \ i \ valori \ efficaci$$

Riconosciamo che per il regime sinusoidale di una resistenza possiamo formalmente usare le stesse relazioni tensioni-correnti della corrente continua usando però i valori efficaci (o i valori massimi).

Con riferimento specifico al nostro problema abbiamo:

$$I_M \ = \ \frac{V_M}{R} \ = \ \frac{325.3}{50} \ = \ 6.506 \ \ A$$

$$I \ = \ \frac{V}{R} = \ \frac{230}{50} \ = \ 4.6 \ \ (=\frac{6.506}{\sqrt{2}}) \qquad A$$

14.4 Potenza istantanea e attiva (media) del carico resistivo

c) Infine possiamo esaminare l’aspetto energetico, calcolando dapprima la potenza istantanea che, per definizione, vale

$$p(t) = v(t)\ i(t)$$

Siccome tensione e corrente hanno sempre lo stesso segno (sono proporzionali), il segno della p(t) è sempre positivo (risultato peraltro scontato trattandosi di un resistore che è un elemento dissipativo). Il massimo di p(t) si ha quando sia la tensione che la corrente sono nell’istante dei loro valori massimi (che sono coincidenti):

$$P_{max}= V_{max}\, I_{max} = V_M \ I_M \ = \ V_M^2 \ /R \ \ = \ I_M^2 \ R \qquad [W]$$

Nel dettaglio la potenza istantanea vale (sostituendo le espressioni della tensione e della corrente):

$$p(t) = V_M I_M \ sin^2(\omega t \ )$$

che, con le regole della trigonometria possiamo scrivere nella forma:

$$p(t) = V_M I_M \frac{1-cos(2\omega t)}{2} = \frac{V_M I_M}{2} - \frac{V_M I_M}{2} cos(2\omega t) \qquad [W]$$

Cioè troviamo che la potenza istantanea assorbita da un resistore in regime sinusoidale è composta da due termici: uno costante (*potenza media*) e uno sinusoidale (cosinusoidale) a frequenza doppia (frequenza angolare pari a 2ω) e valor medio nullo (*potenza fluttuante*). L'andamento è mostrato nella figura precedente.

<u>Di maggiore interesse è la potenza media</u>; essa prende il nome anche di *potenza attiva* e si indica con P.

Per definizione la *potenza attiva* P di un bipolo in regime periodico (non necessariamente sinusoidale) è il *valor medio della potenza istantanea p(t)*.

Per altri motivi è detta anche *potenza reale* anche se la potenza che realmente è assorbita dal bipolo, istante per istante, è la potenza istantanea.

Per quanto detto l'espressione della potenza attiva di un resistore in regime sinusoidale è allora:

$$P = \frac{V_M I_M}{2} = VI = \frac{V^2}{R} = I^2 R \qquad [W]$$

E' un risultato importante riconoscere che <u>per calcolare la potenza attiva di un resistore R in regime sinusoidale si possono impiegare le stesse espressioni valide per la corrente continua calcolate però con i valori efficaci della tensione e della corrente</u>.

Ciò spiega l'affermazione che "*il valore efficace di una corrente (tensione) sinusoidale è quel valore di corrente continua (tensione continua) che sulla stessa resistenza R determina l'assorbimento della stessa potenza media*".

Ancora possiamo tornare al nostro Problema pratico per il quale otteniamo:

$$P_{max} = V_M I_M = 325.3 \cdot 6.506 = 2116 \qquad W$$

e, più importante, la potenza attiva (potenza media) vale:

$$P = VI = 230 \cdot 4.6 = 1058 \quad \text{W}$$

NB – Rispettando le normative, sulla targa della stufetta potrebbe esserci scritto: V= 230 V, I= 4.6 A P= 1058 W.

Se infine vogliamo calcolare l'energia assorbita in un intervallo Δt di funzionamento dovremmo integrare la potenza istantanea su tale intervallo

$$Energia = \int_0^{\Delta t} p(t)\, dt$$

Questa può essere scritta nella forma:

$$Energia = \Delta t \left[\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} p(t)\, dt \right]$$

Ma la parte entro parentesi quadre è per definizione la potenza media (potenza attiva) P[2] e quindi

$$Energia = P \cdot \Delta t$$

Allora per concludere:

$$\text{Energia} = 1058 \cdot 3600 = 3.809\ 10^6 \quad \text{J} \quad \text{(ossia Ws)}$$

oppure, cambiando unità di misura[3]

$$\text{Energia} = 1.058_{[kW]} \cdot 1_{[h]} = 1.058 \quad \text{kWh}$$

[2] A rigore questo è vero solo se Δt contiene un numero intero di periodi, perché la potenza attiva P è definita come media su un periodo completo e non su frazioni di esso.

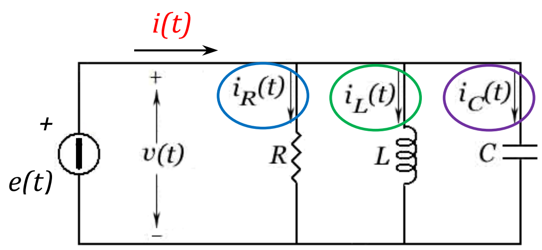
[3] Si riconosca che $\text{Energia}_{[kWh]} = \text{Energia}_{[J]} / 3.6\ 10^6$

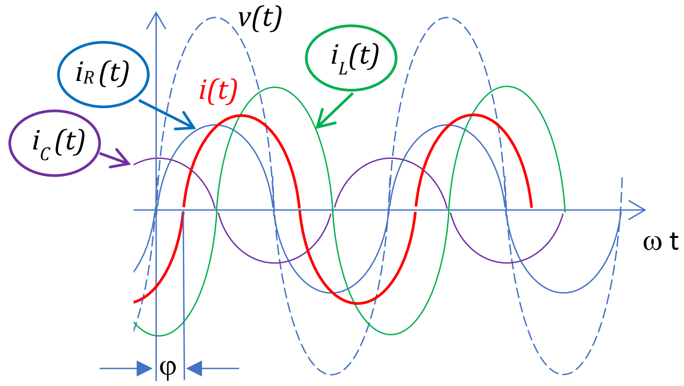
Capitolo 15 - Circuiti in corrente alternata sinusoidale

15.1 Carico RLC in parallelo

Problema 15.1: *Un generatore di tensione e(t)=$\sqrt{2}$ 100 sin 1000t alimenta i tre bipoli ideali RLC in parallelo con R=25 Ω, L=20 mH, C=25 μF. Si vuole:*

a) Studiare le correnti $i_R(t)$, $i_L(t)$, $i_C(t)$, e quella totale i(t).





Questo è un circuito in *regime sinusoidale (*si dice anche in *corrente alternata sinusoidale)*. Si intende che ogni tensione o corrente ha un andamento sinusoidale, ognuna con la propria ampiezza e fase iniziale, ma tutte con la stessa frequenza e, quindi anche pulsazione. Nello specifico del Problema per tutte le grandezze sarà ω=1000 rad/s, come per la forza elettromotrice del generatore che alimenta il circuito.

Se ci fossero più generatori, tutti dovrebbero avere la stessa pulsazione per poter parlare di regime sinusoidale.

La configurazione con i tre bipoli elementari ideali RLC in parallelo consente di evidenziare facilmente interessanti proprietà delle reti in regime sinusoidale che poi potremo applicare anche ad altre configurazioni.

Per iniziare lo studio, riconosciamo intanto che a tutti i bipoli è applicata la stessa tensione v(t) (proprietà della configurazione parallelo) ed essa è pari alla fem e(t) del generatore di tensione:

$$v(t) = e(t) = \sqrt{2}\,100\,sin\,(1000t + 0)$$

Nello specifico del nostro Problema abbiamo:

$V_M = \sqrt{2}\,100 = 141.4\ V$ (valore massimo, ampiezza)

$V = 100\ V$ (valore efficace)

$\omega = 1000\ rad/s$ (pulsazione, frequenza angolare)

$f = \omega/(2\pi) = 159.2\ Hz$ (frequenza)

$\vartheta_v(0) = 0\ rad$ (fase iniziale della tensione)

L'andamento nel tempo della v(t) è mostrato a tratteggio nella figura sopra a destra.

Accertato che per ogni bipolo tensione e corrente sono orientate con la convenzione di segno degli utilizzatori, possiamo calcolare la corrente di ciascuno di essi a partire dalla tensione nota, applicando l'equazione costitutiva (equazione di definizione) del bipolo stesso.

Per il **resistore** abbiamo:

$$v(t) = R\, i_R(t)$$

da cui

$$\boxed{i_R(t) = \frac{V_M}{R} \sin(\omega t + \vartheta_v(0)) = I_{R,M} \sin(\omega t + \vartheta_{R,i}(0))}$$

Nel dettaglio abbiamo allora per un resistore di resistenza R in regime sinusoidale:

$I_{R,M} = V_M/R$	*(legge di Ohm per i valori massimi)*
$I_R = V/R$	*(legge di Ohm per i valori efficaci)*
$\vartheta_{R,i}(0) = \vartheta_v(0)$	*(fase iniziale della corrente)*

La corrente del resistore ha un'ampiezza e un valore efficace che si ottengono dall'ampiezza e dal valore efficace della tensione applicando la legge di Ohm ed inoltre ha la stessa fase della tensione; si dice che <u>in regime sinusoidale corrente e tensione di un resistore sono in fase</u>.

Ciò si riconosce anche dalla forma d'onda della corrente e dela tensione mostrate nella figura (coincidono gli istanti di passaggio per lo zero, oppure di massimo della tensione e della corrente).

Nello specifico del nostro Problema abbiamo:

$I_{R,M} = = V_M/R = \sqrt{2}\,100/25 = \sqrt{2} \cdot 4\ A$ (valore massimo)

$I_R = V/R = 100/25 = 4\ A$ (valore efficace)

ω=1000 rad/s	*(pulsazione)*
$f = \omega/(2\pi) = 159.2$ Hz	*(frequenza)*
$\vartheta_{R,i}(0) = \vartheta_v(0) = 0$ rad	*(fase iniziale della corrente di un resistore)*

Per l'**<u>induttore</u>** abbiamo invece:

$$v(t) = L\, di_L(t)/dt$$

questa è una (elementare) equazione differenziale della quale dobbiamo trovare la soluzione particolare del regime sinusoidale (non ci interessano i termini soluzione dell'omogenea) che sarà una funzione sinusoidale la cui derivata moltiplicata per l'induttanza L è pari alla tensione data.

È facile verificare (basta svolgere la derivata) che la soluzione è:

$$\boxed{i_L(t) = -\frac{V_M}{\omega L}\cos(\omega t + \vartheta_v(0)) = \frac{V_M}{\omega L}\sin(\omega t + \vartheta_v(0) - \frac{\pi}{2}) = I_{L,M}\sin(\omega t + \vartheta_{L,i}(0))}$$

Nel dettaglio abbiamo per un induttore di induttanza L in regime sinuosidale:

$I_{L,M} = V_M/(\omega L) = V_M/X_L$	*("legge di Ohm" per i valori massimi)*
$I_L = V/(\omega L) = V/X_L$	*("legge di Ohm" per i valori efficaci)*
$\vartheta_i(0) = \vartheta_v(0) - \pi/2$	*(fase iniziale della corrente di un induttore)*

ove abbiamo definito la grandezza $X_L = \omega L$ *detta* ***reattanza induttiva****, che gioca un ruolo simile a quello della resistenza R del resistore e che si misura in ohm [Ω].*

La corrente dell'induttore in regime sinusoidale ha un'ampiezza e un valore efficace che si ottengono dall'ampiezza e dal valore efficace della tensione applicando la legge di Ohm formulata per i resistori, ma impiegando la reattanza induttiva X_L al posto della resistenza R.

La fase della corrente è pari a quella della tensione diminuita di $\pi/2$; si dice che <u>in regime sinusoidale la corrente di un induttore è in ritardo di $\pi/2$</u> rispetto alla tensione (è in quadratura in ritardo).

Ciò si riconosce anche dalla forma d'onda della corrente $i_L(t)$ mostrata nella figura (per esempio i passaggi per lo zero della corrente avvengono <u>dopo</u> (con tempi più alti) i corrispondenti passaggi per lo zero della tensione, con un ritardo di un quarto di periodo (T/4) ovvero di $\pi/2$).

Nello specifico del nostro Problema abbiamo:

$X_L = \omega L = 1000 \cdot 0.020 = 20 \quad \Omega$	*(reattanza induttiva)*
$I_{L,M} = = V_M / X_L = \sqrt{2}\ 100 / 20 = \sqrt{2} \cdot 5 \quad A$	*(valore massimo)*
$I_L = V / X_L = 100/20 = 5 \quad A$	*(valore efficace)*
$\omega = 1000 \quad rad/s$	*(pulsazione)*
$f = \omega/(2\pi) = 159.2 \quad Hz$	*(frequenza)*
$\vartheta_{L,i}(0) = \vartheta_v(0) - \pi/2 = -\pi/2 \quad rad$	*(fase iniziale)*

Per il **condensatore** abbiamo infine:

$$i_C(t) = C\ dv(t)/dt$$

che fornisce direttamente l'espressione della corrente in regime sinusoidale, data quella della tensione:

$$\boxed{i_C(t) = \omega C\ V_M \cos(\omega t + \vartheta_v(0)) = \omega C\ V_M \sin(\omega t + \vartheta_v(0) + \frac{\pi}{2}) = I_{C,M} \sin(\omega t + \vartheta_{C,i}(0))}$$

Nel dettaglio abbiamo per un condensatore di capacità C in regime sinuosidale:

$I_{C,M} = (\omega C) V_M = V_M / X_C$	*("legge di Ohm" per i valori massimi)*
$I_C = (\omega C) V = V / X_C$	*("legge di Ohm" per i valori efficaci)*
$\vartheta_i(0) = \vartheta_v(0) + \pi/2$	*(fase iniziale della corrente di un induttore)*

ove abbiamo definito la grandezza $X_C = 1/(\omega C)$ *detta **reattanza capacitiva**, che gioca un ruolo simile a quello della resistenza R del resistore (e della reattanza induttiva dell'induttore) e che si misura in ohm [Ω].*

La corrente del condensatore in regime sinusoidale ha un'ampiezza e un valore efficace che si ottengono dall'ampiezza e dal valore efficace della tensione applicando la legge di Ohm formulata per i resistori, ma impiegando la reattanza capacitiva X_C al posto della resistenza R.

La fase della corrente è pari a quella della tensione aumentata di π/2; si dice che <u>in regime sinusoidale la corrente di un condensatore è in anticipo di</u> π/2 rispetto alla tensione (è in quadratura in anticipo).

Ciò si riconosce anche dalla forma d'onda della corrente $i_C(t)$ mostrata nella figura (per esempio i passaggi per lo zero della corrente avvengono <u>prima</u> (con tempi più bassi) i corrispondenti passaggi per lo zero della tensione, con un anticipo di un quarto di periodo (T/4) ovvero di $\pi/2$).

Nello specifico del nostro Problema abbiamo:

$X_C = 1/(\omega C) = 1/(1000 \cdot 25\ 10^{-6}) = 40 \quad \Omega$	*(reattanza induttiva)*

$I_{C,M}$= $=V_M/X_C = \sqrt{2}\,100/40 = \sqrt{2}\cdot 2.5$ A (valore massimo)

$I_C = V/X_C = 100/40 = 2.5$ A (valore efficace)

$\omega = 1000$ rad/s (pulsazione)

$f = \omega/(2\pi) = 159.2$ Hz (frequenza)

$\vartheta_{C,i}(0) = \vartheta_v(0) + \pi/2 = +\pi/2$ rad (fase iniziale)

<u>Passiamo al calcolo della corrente totale i(t) di figura</u>.

Il principio di Kirchhoff per le corrente ci consente certamente di scrivere:

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t)$$

che, svolta graficamente, porta all'andamento riportato in figura.

Si comprende, e si vede anche a colpo d'occhio dalla figura, che, detti I_M e I il valore massimo e il valore efficace della corrente toale:

$$I_M \neq I_{R,M} + I_{L,M} + I_{C,M}$$

$$I \neq I_R + I_L + I_C$$

D'altra parte, sia i valori massimi che i valori efficaci sono per definizione sempre positivi, indipendentemente dai versi positivi stabiliti per le correnti (o tensioni se si parlasse di quelle) e questo aspetto da solo fa capire che non possono essere usati nei bilanci dei principi di Kirchhoff.

I valori efficaci (e i valori massimi) delle tensioni e delle correnti, non rispettano le equazioni derivanti dai principi di Kirchhoff per le tensioni e le correnti.

NON si applicano i principi di Kirchhoff per le tensioni e le correnti usando i valori efficaci!

La determinazione della corrente totale i(t) richiederebbe pertanto di svolgere la seguente sommatoria:

$$i(t) = I_{R,M}\,sin\,(\omega t + \vartheta_{R,i}(0)) + I_{L,M}\,sin\,(\omega t + \vartheta_{L,i}(0)) + I_{C,M}\,sin\,(\omega t + \vartheta_{C,i}(0))$$

certamente non immediata.

Mettendo le varie espressioni delle correnti, la sommatoria diventa:

$$i(t) = \frac{V_M}{R}\ sin\ (\omega t) + \frac{V_M}{\omega L}\ sin\ (\omega t\ -\ \frac{\pi}{2}) + \omega C\ V_M\ sin\ (\omega t\ +\ \frac{\pi}{2})$$

Applicando le formule dell'addizione della funzione seno[4]:

$$i(t) = V_M\left[\frac{1}{R}sin(\omega t) - \frac{1}{\omega L}cos(\omega t) + \omega C cos(\omega t)\right] =$$
$$= V_M\left[\frac{1}{R}sin(\omega t)\ + (\omega C - \frac{1}{\omega L})\ cos(\omega t)\right]$$

Assunto che sia

$$i(t) = I_M sin(\omega t - \varphi) = I_M[sin(\omega t)\cdot cos\varphi\ -\ cos(\omega t)\cdot sin\varphi]$$

Per confronto abbiamo

$$I_M cos\varphi = \ \frac{V_M}{R}$$
$$-\ I_M sin\varphi = V_M(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

da cui alla fine (dalla somma delle equazioni elevate al quadrato e dal loro rapporto):

$$I_M =\ V_M\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2\ + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$
$$tan\varphi\ = -\ \frac{(\omega C - \frac{1}{\omega L})}{\frac{1}{R}}$$

La prima può essere scritta anche (dividendo a destra e sinistra per la radice di 2) come:

[4] sin(x+y)=sinx*cosy + cosx*siny

$$I = \quad V\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

L'angolo φ, che rappresenta <u>l'angolo di ritardo della corrente rispetto alla tensione ovvero di anticipo della tensione rispetto alla corrente</u>, prende il nome di *sfasamento* (è positivo quando la corrente è in ritardo rispetto alla tensione)[5]. Esso è evidenziato nella figura delle forme d'onda sopra mostrata.

Numericamente, per il nostro Problema risulta:

$$I = V\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} = 100\sqrt{\left(\frac{1}{25}\right)^2 + \left(1000 \cdot 25\ 10^{-6} - \frac{1}{1000\ 20\ 10^{-3}}\right)^2} = 4.717 \quad A$$

$$\varphi = atan\left(-\frac{(\omega C - \frac{1}{\omega L})}{\frac{1}{R}}\right) = atan\left(-\frac{\left(1000 \cdot 25\ 10^{-6} - \frac{1}{1000\ 20\ 10^{-3}}\right)}{\left(\frac{1}{25}\right)}\right) = 0.5586\, rad \equiv 32.06°$$

<u>In definitiva:</u>

$$i(t) = I_M sin(\omega t - \varphi) = \sqrt{2} \cdot 4.717\ sin(\omega t - 0.5586\,)$$

15.2 Rappresentazioni simboliche delle tensioni e delle correnti sinusoidali

È evidente che la soluzione dei circuiti in regime sinusoidale nel dominio del tempo, maneggiando funzioni trigonometriche è molto laboriosa e praticamente irrealizzabile appena il circuito diventi anche solo un po' più articolato di quello elementare qui in esame.

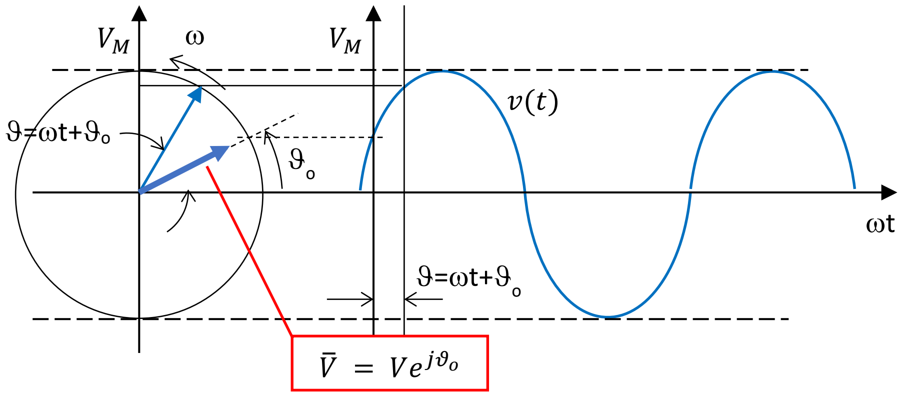
Uno strumento matematico adeguato a superare questo inconveniente è la *rappresentazione simbolica delle grandezze sinusoidali* (come viene chiamata solitamente; qualche volta anche *rappresentazione fasoriale o rappresentazione vettoriale*) proposta alla fine del 1800 da Heaviside[6].

La rappresentazione simbolica prende avvio dalla constatazione che:

a) In un circuito in regime sinusoidale tutte le tensioni e le correnti hanno la stessa frequenza (ed anche la stessa frequenza angolare). Si dice che sono isofrequenziali. La frequenza (ed anche la frequenza angolare) non è pertanto elemento distintivo delle varie grandezze elettriche.

[5] Il quadrante di φ dipende dai segni di $sin\ \varphi\ \ e\ cos\varphi$ che si deducono dalle due equazioni scritte.
[6] Oliver Heaviside (Londra, 18 maggio 1850 – Torquay, 3 febbraio 1925) è stato un matematico, fisico e ingegnere britannico.

b) In un circuito in regime sinusoidale le tensioni e le correnti si distinguono sulla base delle loro ampiezze e delle loro fasi iniziali nella loro scrittura in termini di funzione seno.



Tutto ciò fa pensare di abbinare una grandezza sinusoidale ad un *vettore rotante* in un piano complesso (Reale-Immaginario) e del quale la grandezza sinusoidale è la proiezione sull'asse Immaginario (asse verticale).

Per esempio, la tensione $v(t)=V_M\sin(\omega t+ \vartheta_o)$ assegnata nel nostro problema[7] può essere abbinata al vettore rotante con velocità angolare ω e ampiezza V_M così da poter scrivere (vedi figura sopra)

$$v(t) = Im\left[V_M\, e^{j(\omega t+ \vartheta_o)}\right] = \sqrt{2}Im\left[V\, e^{j(\omega t+ \vartheta_o)}\right] = \sqrt{2}Im\left[(Ve^{j\vartheta_o})e^{j\omega t}\right] = \sqrt{2}Im\left[(\bar{V})e^{j\omega t}\right]$$

ove con Im[•] si intende "*coefficiente dell'immaginario di* [•]".

Nella scrittura sopra, la grandezza

$$\bar{V} = Ve^{j\vartheta_o}$$

è un numero complesso (<u>costante nel tempo</u>, cioè fisso nel piano!) di modulo pare al valore efficace (per comodità) della tensione v(t) e di argomento pari alla fase iniziale della tensione v(t) e prende il nome di <u>rappresentazione simbolica</u> della v(t). La sua conoscenza è tutto ciò che ci serve per qualificare la v(t).

Vediamo il vantaggio dell'uso della rappresentazione simbolica applicandola dapprima alle equazioni costitutive dei singoli bipoli elementari.

Per un **<u>resistore</u>** abbiamo, in generale:

[7] Nel caso specifico del problema $\vartheta_o=\vartheta(0)=0$, ma per generalità del discorso lo manteniamo indicato.

$$v(t) = R\, i(t)$$

da cui

$$\sqrt{2} Im\left[(\bar{V}) e^{j\omega t}\right] = R \cdot \sqrt{2} Im\left[(\bar{I}) e^{j\omega t}\right]$$

ovvero

$$\boxed{\begin{gathered} \bar{V} = R\bar{I} \\ \bar{I} = \frac{\bar{V}}{R} \end{gathered}}$$

Per un **<u>induttore</u>** abbiamo, in generale:

$$v(t) = L\, di(t)/dt$$

da cui

$$\sqrt{2} Im\left[(\bar{V}) e^{j\omega t}\right] = L\ \frac{d\left\{\sqrt{2} Im\left[(\bar{I}) e^{j\omega t}\right]\right\}}{dt}$$

Siccome la derivata del coefficiente dell'immaginario di una funzione complessa è pari al coefficiente dell'immaginario della derivata e la derivata dell'esponenziale è pari all'esponenziale stesso per la derivata del suo esponente, possiamo riarrangiare l'espressione nella forma

$$\sqrt{2} Im\left[(\bar{V}) e^{j\omega t}\right] = L\, \sqrt{2} Im\left[\frac{d\left\{(\bar{I}) e^{j\omega t}\right\}}{dt}\right] = L\, \sqrt{2} Im\left[(\bar{I})\frac{d\left\{e^{j\omega t}\right\}}{dt}\right] = \sqrt{2} Im\left[(j\omega L \cdot \bar{I}) e^{j\omega t}\right]$$

ovvero

$$\boxed{\begin{gathered} \bar{V} = j\omega L \cdot \bar{I} = jX_L\bar{I} \\ \bar{I} = \frac{\bar{V}}{j\omega L} = \frac{\bar{V}}{jX_L} = -j\frac{\bar{V}}{X_L} \end{gathered}}$$

Per un **<u>condensatore</u>** abbiamo, in generale:

$$i(t) = C\, dv(t)/dt$$

da cui

$$\sqrt{2} Im\left[(\bar{I}) e^{j\omega t}\right] = C\ \frac{d\left\{\sqrt{2} Im\left[(\bar{V}) e^{j\omega t}\right]\right\}}{dt}$$

Ripetendo il procedimento precedentemente fatto si perviene a:

$$\bar{I} = j\omega C \cdot \bar{V} = j\frac{\bar{V}}{X_C}$$

$$\bar{V} = \frac{\bar{I}}{j\omega C} = -j\,\frac{\bar{I}}{\omega C} = -j\,X_C\bar{I}$$

In conclusione, possiamo affermare che:

a) Con l'uso delle rappresentazioni simboliche, per tutti e tre i bipoli elementari si utilizza formalmente la stessa equazione costitutiva, algebrica (non più differenziale) scritta nel dominio dei numeri complessi (legge di Ohm generalizzata):

$$\bar{V} = \dot{Z} \cdot \bar{I}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\dot{Z}}$$

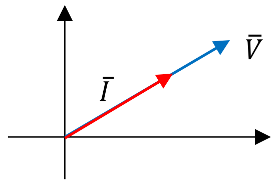
ove $\dot{Z}$ è un operatore complesso (NON è una rappresentazione simbolica! NON esiste una z(t)!) che gioca il ruolo della resistenza R nella legge di Ohm dei resistori, collegando formalmente allo stesso modo le rappresentazioni simboliche della tensione e della corrente di ciascun bipolo. L'operatore $\dot{Z}$ prende il nome di *impedenza* (complessa) del bipolo e il suo modulo si misura in ohm [Ω].

Da quanto scritto riconosciamo che:

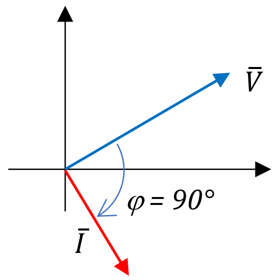
- per un resistore $\dot{Z} = R + j0 = R$
- per un induttore $\dot{Z} = 0 + j\omega L = j\omega L = j\,X_L$
- per un condensatore $\dot{Z} = 0 - j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -j\,X_C$

b) Le equazioni costitutive dei tre bipoli elementari espresse attraverso le rappresentazioni simboliche possono essere rappresentate anche graficamente in forma di *diagrammi vettoriali* in un piano complesso (i cui assi spesso non si tracciano, ma si immaginano).

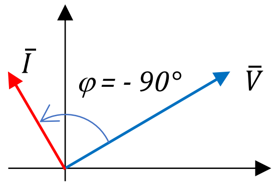
- per un resistore
  - *tensioni e correnti sono in fase*
  - *lo sfasamento φ=0*



- per un induttore
  - *la corrente è in quadratura in ritardo*
  - *lo sfasamento φ=90°*



- per un condensatore
  - *la corrente è in quadratura in anticipo*
  - *lo sfasamento φ= - 90°*



c) Se delle equazioni di Ohm generalizzate calcoliamo il modulo dei due membri, otteniamo

$$|\dot{Z}| = Z = \frac{|\bar{V}\,|}{|\bar{I}|} = \frac{V}{I}$$

cioè:

Il modulo dell'operatore impedenza di un bipolo rappresenta il rapporto fra il valore efficace della tensione e quello della corrente.

d) Se invece esprimiamo ogni numero complesso in forma "polare" arriviamo a

$$\bar{I} = Ie^{j\vartheta_i} = \frac{\bar{V}}{\dot{Z}} = \frac{Ve^{j\vartheta_v}}{Ze^{j\varphi}} = \frac{V}{Z}\,e^{j(\vartheta_v - \varphi)}$$

dalla quale riotteniamo la relazione che lega i valori efficaci, ma anche la relazione

$$\varphi = \vartheta_v - \vartheta_i$$

dove per semplicità di scrittura ϑ_v e ϑ_i sono gli argomenti delle rappresentazioni simboliche della tensione e della corrente cioè i valori iniziali delle relative fasi istantanee. La loro differenza è lo sfasamento φ *già definito.*

L'argomento φ dell'operatore impedenza corrisponde allo sfasamento fra tensione e corrente.

Vediamo i vantaggi delle rappresentazioni simboliche delle tensioni e delle correnti nella scrittura delle leggi di Kirchhoff. Prendiamo per esempio il bilancio delle correnti scritto per il circuito del nostro problema:

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t)$$

Esso diventa

$$\sqrt{2}Im\left[(\bar{I})e^{j\omega t}\right] = \sqrt{2}Im\left[(\bar{I}_R)e^{j\omega t}\right] + \sqrt{2}Im\left[(\bar{I}_L)e^{j\omega t}\right] + \sqrt{2}Im\left[(\bar{I}_C)e^{j\omega t}\right]$$

cioè in definitiva:

$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C$$

che ha la stessa forma dell'equazione scritta nel dominio del tempo. Lo stesso si ricaverebbe per i bilanci delle tensioni.

I principi di Kirchhoff per le correnti e le tensioni di un circuito in regime sinusoidale si scrivono con i valori istantanei delle correnti e delle tensioni (corretto, ma scomodo) o con le rappresentazioni simboliche delle correnti e delle tensioni. Ricordiamo che NON si usano i valori efficaci!

Applichiamo i nuovi risultati al circuito del nostro problema. Come primo passo calcoliamo la rappresentazione simbolica della tensione impressa data:

$$\bar{V} = Ve^{j\vartheta_o} = 100e^{j0} = 100 \qquad (in\ questo\ caso\ \text{"}reale\text{"}\ perchè\ \vartheta_o = \vartheta(0) = 0)$$

Con le leggi di Ohm generalizzate possiamo calcolare le rappresentazioni simboliche delle correnti dei tre bipoli:

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{V}}{R} = \frac{100}{25} = 4 = 4e^{j0}$$

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{V}}{j\omega L} = \frac{100}{j1000 \cdot 0.020} = -j\,\frac{100}{20} = -j5 = 5e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\bar{I}_C = j\omega C \cdot \bar{V} = j1000\ 25\ 10^{-6}\ 100 = j\ 2.5 = 2.5e^{+j\frac{\pi}{2}}$$

NB – le impedenze dei tre bipoli sono rispettivamente:

- *per un resistore* $\dot{Z} = R + j0 = R = 25$

- *per un induttore* $\dot{Z} = 0 + j\omega L = j\omega L = j\,X_L = j20 = 20$
- *per un condensatore* $\dot{Z} = 0 - j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -j\,X_C = -j\,40$

ed ogni corrente potrebbe poi essere calcolata con la $\bar{V}/\dot{Z}$ *.*

Se vogliamo le espressioni temporali istantanee delle correnti, basta ricordare il legame fra le espressioni temporali e le rappresentazioni simboliche e si ottiene:

$$i_R(t) = \sqrt{2} Im\left[(\bar{I}_R)e^{j\omega t}\right] = \sqrt{2} \cdot 4\,sin(\omega t + 0) = \sqrt{2} \cdot 4\,sin(\omega t)$$

e analogamente

$$i_L(t) = \sqrt{2} Im\left[(\bar{I}_L)e^{j\omega t}\right] = \sqrt{2} \cdot 5\,sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$i_C(t) = \sqrt{2} Im\left[(\bar{I}_C)e^{j\omega t}\right] = \sqrt{2} \cdot 2.5\,sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Per la corrente totale basta applicare il principio di Kirchhoff alle rappresentazioni simboliche

$$\bar{\mathrm{I}} = \bar{\mathrm{I}}_\mathrm{R} + \bar{\mathrm{I}}_\mathrm{L} + \bar{\mathrm{I}}_\mathrm{C} = 4 - \mathrm{j}5 + \mathrm{j}2.5 = 4 - \mathrm{j}2.5 = 4.717e^{-j0.5586}$$

NB- L'argomento di un numero complesso si calcola con atan(Im/Re)

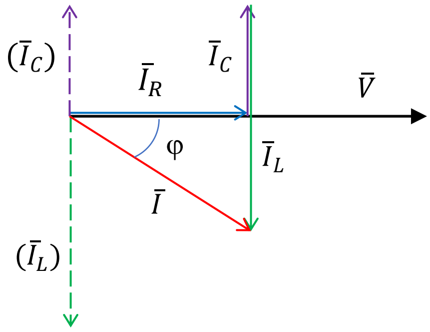
Allora l'espressione temporale è:

$$i(t) = \sqrt{2} Im\left[(\bar{I})e^{j\omega t}\right] = \sqrt{2} \cdot 4.717\,sin(\omega t - 0.5586)$$

coincidente, ovviamente, con quella precedentemente ottenuta, ma ricavata in maniera sostanzialmente più agevole.

Per l'intero circuito (così come per ogni parte di esso) si possono tracciare i *diagrammi vettoriali.* Essi altro non sono che la rappresentazione vettoriale delle grandezze simboliche calcolate, con l'evidenziazione delle relazioni algebriche che le legano a seguito dei principi di Kirchhoff.

Per esempio, per il circuito che stiamo studiando possiamo tracciare il seguente diagramma vettoriale. Tracciato il vettore $\bar{V}$ della tensione, in fase con esso abbiamo quello $\bar{I}_R$ della corrente del resistore e, quindi, in quadratura in ritardo e poi in anticipo quelli $\bar{I}_\mathrm{L}$ e $\bar{I}_\mathrm{C}$ dell'induttore e del condensatore.



Il vettore $\bar{I}$ della corrente totale risulta dalla somma vettoriale dei vettori delle tre correnti dei bipoli. Questa si potrebbe ottenere con una successione di parallelogrammi che sommano due a due i vettori, o più semplicemente disponendo i vettori in successione, applicando ognuno sulla punta del precedente. Il vettore che congiunge la coda del primo vettore con la punta dell'ultimo e pari alla somma dei vettori, come appare in figura.

È facile riconoscere che il diagramma vettoriale è un prezioso strumento grafico per evidenziare, nel loro insieme, le relazioni di fase e di ampiezza assieme alle relazioni di somma che sussistono fra tutte le grandezze del circuito.

Visto il parallelo dei tre bipoli nel suo complesso, cioè dai morsetti del generatore di tensione, esso presenta una certa tensione v(t) e assorbe una certa corrente i(t). Per entrambe conosciamo le rappresentazioni simboliche.

Possiamo allora definire l'impedenza equivalente del parallelo dei tre bipoli come:

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C} = \frac{\bar{V}}{\frac{\bar{V}}{R} + \frac{\bar{V}}{jX_L} + \frac{\bar{V}}{-jX_C}}$$

che diventa:

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} + \frac{1}{-jX_C}} = \frac{1}{\frac{1}{\dot{Z}_R} + \frac{1}{\dot{Z}_L} + \frac{1}{\dot{Z}_C}}$$

che si riconosce altro non è che la formula del parallelo di tre resistenze scritta usando le tre impedenze.

L'utilizzo delle rappresentazioni simboliche delle tensioni e delle correnti consente quindi di riproporre lo stesso formulario (con le dovute attenzioni) impiegato per la soluzione dei circuiti resistivi in corrente continua sostituendo le resistenze con le impedenze.

Per il nostro Problema l'impedenza equivalente vale:

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{100}{4.717e^{-j0.5586}} = 21.20\, e^{j0.5586} = Ze^{j\varphi}$$

15.3 Carico RLC risonante parallelo

Il circuito in esame, con i tre bipoli elementari RLC in parallelo, invita ad approfondire un particolare comportamento dei circuiti in regime sinusoidale che è quello della risonanza parallelo o antirisonanza.

Dalle equazioni scritte, dagli andamenti temporali, così come dai diagrammi vettoriali, possiamo vedere che le correnti nell'induttore e nel condensatore, sottoposti alla stessa tensione, si cancellano parzialmente l'una l'altra (i vettori, per esempio, hanno stessa direzione e versi opposti).

Nel caso particolare in cui le reattanze induttiva e capacitiva siano identiche ($X_L = X_C$) le due correnti nell'induttore e nel condensatore sono esattamente uguali ed opposte (stesso valore efficace (stessa ampiezza), ma sfasamento reciproco pari a 180°) e non danno alcun contributo alla corrente totale, qualsiasi sia la loro ampiezza.

Questo accade quando

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

ossia

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad (condizione\ di\ risonanza)$$

che rappresenta la *condizione di risonanza parallelo o di antirisonanza*

Per esempio, per il nostro circuito la condizione di risonanza, con i parametri dati si manifesterebbe per la pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{20 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 10^{-6}}} = 1414\, rad/s \quad (pari\ f = 225\, Hz)$$

per la quale si ha $X_L = X_C = 28.28\ \Omega$, $I_L = I_C = 3.536$ A (valore efficace), $I = I_R = 4$ A

***Autovalutazione**: disegnare il diagramma vettoriale in questo caso di risonanza parallelo.*

Addirittura, possiamo immaginare il caso in cui la condizione di risonanza parallelo si manifesta mentre la resistenza (anche questa posta in parallelo ai bipoli L e C) sia infinitamente grande, cioè sia un circuito ideale aperto (di fatto quindi non c'è il ramo resistivo!). Allora la corrente nel resistore, come quella totale sono nulle, nonostante ci sia corrente (magari anche intensa, nell'induttore e nel condensatore).

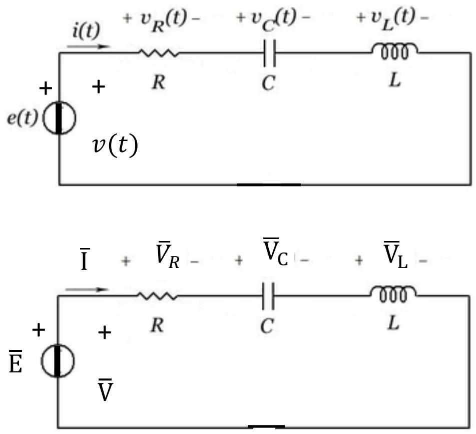
Autovalutazione*: fare il diagramma vettoriale per il caso: $V=200\ V$, $R \cong \infty\ \Omega$, $L=10\ mH$, $C=100\ \mu F$, dopo aver calcolato, e applicato, la pulsazione di risonanza.*

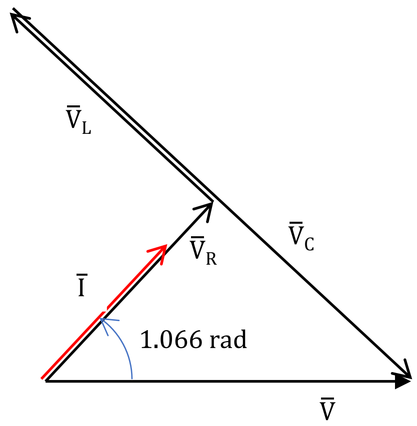
Capitolo 16 - Potenze in regime sinusoidale

16.1 Carico RLC in serie

Problema 16.1: *Un generatore di tensione e(t) presenta una fem sinusoidale con valore efficace E=110 V e frequenza 60 Hz. Esso alimenta i tre bipoli ideali RLC in serie con R=8 Ω, L=32 mH, C=0.1 mF. Si vogliono studiare:*

- *b) La corrente del circuito e le tensioni su R, L, C.*
- *c) La potenza erogata dal generatore e quelle assorbite dai bipoli R, L, C.*





Anche questo è un circuito in *regime sinusoidale* ove ogni tensione e corrente ha un andamento sinusoidale, ognuna con la propria ampiezza e fase iniziale, ma tutte con la stessa frequenza e, quindi anche pulsazione. Nello specifico del Problema per tutte le grandezze sarà f= 60 Hz[8], ω=2πf=377 rad/s, imposta dalla forza elettromotrice del generatore che alimenta il circuito.

La configurazione con i tre bipoli elementari ideali RLC in serie consente di evidenziare alcune altre interessanti proprietà delle reti in regime sinusoidale (oltre a quelle già viste nl caso di RLC parallelo), in particolare quelle relative alle potenze, che poi potremo applicare anche ad altre configurazioni.

Il circuito è disegnato in due modalità differenti, ma ugualmente lecite ed equivalenti: in un caso sono indicate le grandezze temporali (le loro espressioni nel tempo); nell'altro sono indicate le loro rappresentazioni simboliche. Per ovvi motivi di comodità, la seconda modalità è di uso più frequente.

Abbiamo visto che lo studio delle reti in regime sinusoidale con l'uso delle rappresentazioni simboliche è decisamente più agevole che con l'uso delle espressioni sinusoidali temporali. Quindi affrontiamolo senz'altro in questo modo, facendo riferimento alla seconda rappresentazione del circuito in figura.

[8] Per inciso, la tensione efficace di 110-120 V e la frequenza di 60 Hz sono i valori standard delle reti di distribuzione pubblica in molti paesi del mondo fra i quali Stati Uniti, Canada, molti stati dell'America del Sud, Corea del Sud e parte del Giappone.

Per iniziare determiniamo la rappresentazione simbolica della fem. Il testo non fornisce il valore della fase iniziale, sicché siamo autorizzati a fissarla a nostro piacimento. Sia pari a zero, e allora

$$\bar{\mathrm{E}} = \mathrm{E}e^{j\vartheta_o} = Ee^{j0} = E = 110$$

Scriviamo poi le espressioni delle tensioni sui bipoli, detta $\bar{I}$ la corrente del circuito:

$$\bar{V}_R = R\bar{I}$$

$$\bar{V}_L = j\omega L\,\bar{I} = jX_L\bar{I}$$

$$\bar{V}_C = -j\,\frac{\bar{I}}{\omega C} = -jX_C\bar{I}$$

Per il principio di Kirchhoff delle tensioni poi abbiamo:

$$\bar{E} = \bar{V} = \bar{V}_R + \bar{V}_L + \bar{V}_C$$

cioè:

$$\bar{V} = R\bar{I} + j\omega L\,\bar{I} - j\,\frac{\bar{I}}{\omega C} = R\bar{I} + jX_L\bar{I} - jX_C\bar{I} = \dot{Z}_{eq}\bar{I}$$

con

$$\dot{Z}_{eq} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j(X_L - X_C)$$

che è l'impedenza equivalente dei tre bipoli in serie, che si ottiene, formalmente come si fa con le resistenze, sommando le singole impedenze (complesse! Non i soli moduli!).

L'impedenza (complessa) equivalente della serie di più impedenze (complesse) è pari alla somma delle impedenze (complesse).

Infine ricaviamo:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\dot{Z}_{eq}} = \frac{\bar{V}}{R + j(X_L - X_C)}$$

Non ci resta che calcolare le singole impedenze e quella equivalente:

- *per il resistore* $\dot{Z}_R = R + j0 = R = 8$
- *per un induttore* $\dot{Z}_L = 0 + j\omega L = j\omega L = j\,X_L = j377 \cdot 0.032 = j\,12.06$
- *per il condensatore* $\dot{Z}_C = 0 - j\frac{1}{\omega C} = -\,j\frac{1}{\omega C} = -j\,X_C = -\,j\frac{1}{377 \cdot 0.0001} = -j\,26.53$

- *per l'impedenza equivalente* $\dot{Z}_{eq} = R + j(X_L - X_C) = 8 - j14.47 = 16.53e^{-j1.066}$

Sostituendo nell'espressione della corrente:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\dot{Z}_{eq}} = \frac{110}{8 - j14.47} = \frac{110(8 + j14.47)}{(8 - j14.47)(8 + j14.47)} = \frac{110(8 + j14.47)}{8^2 + 14.47^2} = \frac{110(8 + j14.47)}{273.4}$$

ossia

$$\bar{I} = 3.219 + j\,5.822 = 6.653\,e^{j1.066}$$

Oppure in altro modo[9]

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\dot{Z}_{eq}} = \frac{110}{16.53e^{-j1.066}} = 6.655e^{j1.066} = 6.655(cos1.066_{[rad]} + jsin1.066_{[rad]}) = 3.219 + j\,5.825$$

Abbiamo trovato che *la corrente ha un valore efficace di 6.653 A e uno sfasamento di 1.066 rad (pari a 61.08°) in anticipo rispetto alla tensione (φ= -1.066 rad).*

Se vogliamo l'andamento temporale i(t) della corrente, facilmente possiamo scrivere:

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 6.653\,sin(377t + 1.066)$$

Completiamo con le tensioni:

$$\bar{V}_R = R\bar{I} = 8 \cdot 6.653\,e^{j1.066} = 53.26e^{j1.066}$$

$$\bar{V}_L = jX_L\bar{I} = 12.06 \cdot 6.653\,e^{j(1.066+\pi/2)} = 80.24e^{j2.637}$$

$$\bar{V}_C = -jX_C\bar{I} = 26.53 \cdot 6.653\,e^{j(1.066-\pi/2)} = 176.5e^{-j0.5048}$$

I valori efficaci delle tre tensioni sono pari ai moduli delle loro rappresentazioni simboliche (per definizione delle rappresentazioni simboliche) e cioè V_R= 53.26 V, V_L= 80.24 V, V_C= 176.5 V.

Notiamo che uno dei valori efficaci è maggiore di quello della fem, ma ciò non è in contrasto con alcunché. Notiamo pure che le tensioni sui singoli bipoli non sono in fase con la fem: la $\bar{V}_R$ è in anticipo di 61.08°, la $\bar{V}_L$ di 151.1° (2.637 rad) e la $\bar{V}_C$ in ritardo di 28.92° (0.5048 rad).

[9] Le piccole differenze nei risultati finali sono dovute agli arrotondamenti a 4 cifre significative dei risultati intermedi.

Il diagramma vettoriale delle tensioni e della corrente è mostrato (qualitativamente) nella figura sopra. Osserviamo l'angolo di quadratura fra tensione e corrente negli elementi L e C (elementi *reattivi*). Si riconosce anche che la tensione sul condensatore è maggiore di tutte. E che è in ritardo rispetto alla fem ossia alla tensione totale della serie (quest'ultima è rappresentata da un vettore orizzontale, mentre quella sul condensatore è un vettore nel 4^ quadrante).

***Autovalutazione**: derivare le espressioni temporali (andamenti) delle tensioni sui bipoli e di quella totale e rappresentarle (qualitativamente) su un diagramma tempo-tensioni. Sovrapporre l'andamento della corrente.*

16.2 Potenze istantanea, attiva, reattiva ed apparente

Passiamo allo studio delle potenze e iniziamo da quella erogata dal generatore e assorbita dall'intero circuito. Per generalizzare consideriamo il caso di un circuito che fa capo a due terminali fra i quale c'è una tensione

$$v(t) = \sqrt{2} \cdot V \, sin(\omega t + \vartheta_{ov}) \qquad [V$$

e, con la convenzione di segno degli utilizzatori, una corrente

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \, sin(\omega t + \vartheta_{oi}) = \sqrt{2} \cdot I \, sin(\omega t + \vartheta_{ov} - \varphi) \qquad [A]$$

avendo, come al solito indicato con φ l'angolo di sfasamento in ritardo della corrente rispetto alla tensione (angolo di anticipo della tensione rispetto alla corrente.

Senza dubbi, possiamo esprimere la potenza istantanea assorbita[10] come:

$$p(t) = v(t)i(t) = \sqrt{2} \cdot V \, sin(\omega t + \vartheta_{ov}) \sqrt{2} \cdot I \, sin(\omega t + \vartheta_{ov} - \varphi) \qquad [W]$$

che diventa:

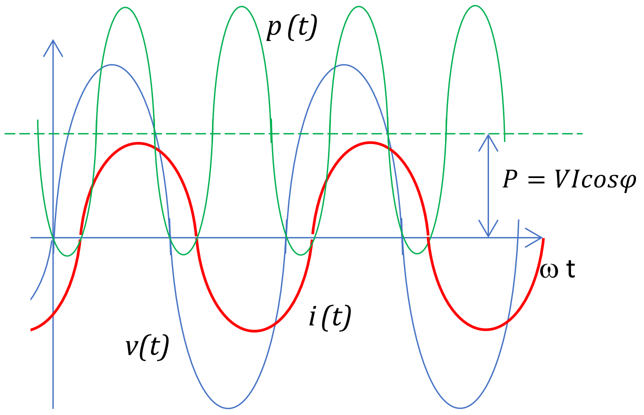
$$p(t) = \left(\sqrt{2} \cdot V \sqrt{2} \cdot I\right) \frac{cos[(\omega t + \vartheta_{ov}) - (\omega t + \vartheta_{ov} - \varphi)] - cos[(\omega t + \vartheta_{ov}) + (\omega t + \vartheta_{ov} - \varphi)]}{2}$$

Dopo le dovute semplificazioni:

$$p(t) = VIcos\varphi - VI \, cos(2\omega t + 2\vartheta_{ov} - \varphi) \qquad [W]$$

e assume un andamento come quello qui sotto rappresentato.

[10] Le potenze così calcolate sono potenze assorbite. Analoghe espressioni e proprietà si ottengono con la convenzione di segno dei generatori e si riferiscono a potenze erogate.



Osserviamo che la potenza istantanea non ha sempre lo stesso segno: essa è positiva negli intervalli di tempo ove tensione e corrente hanno lo stesso segno, negativa altrimenti. Essa è zero ove la tensione o la corrente sono nulle.

Inoltre, è costituita da due termini:

a. un termine costante nel tempo pari a $VIcos\varphi$, ove V e I sono i valori efficaci della tensione e della corrente e φ l'angolo di sfasamento;
b. un termine sinusoidale a pulsazione 2ω (doppia rispetto a quella della tensione e corrente) a valor medio nullo.

Il primo termine rappresenta pertanto la *potenza media* e per definizione essa è la *potenza attiva P:*

$$P = VIcos\varphi \quad potenza\ attiva\ (potenza\ media)\ in\ regime\ sinusoidale \qquad [W]$$

Il suo segno dipende dal segno del cosφ: positivo nel 1^ e 4^ quadrante, negativo altrove.

Il secondo termine è noto come *potenza fluttuante:*

$$\mathrm{p(t)_{fluttuante}} = -\mathrm{VI}\cos(2\omega t + 2\vartheta_{ov} - \varphi) = \mathrm{VI}\sin(2\omega t + 2\vartheta_{ov} - \varphi - \frac{\pi}{2}) \qquad [\mathrm{W}]$$

Autovalutazione*: tracciare l'andamento temporale della potenza istantanea per ciascuno dei bipoli elementari R, L e C.*

Di pratico impiego è anche la potenza ottenuta dal semplice prodotto dei valori efficaci. Essa prende il nome di *potenza apparente*, si indica con S e si misura (per distinguerla dalla potenza attiva) in volt·ampere [VA], che ha comunque le stesse dimensioni dei watt [W].

$$S = VI \quad \textit{potenza apparente in regime sinusoidale} \quad [VA]$$

Essa è sempre positiva (come i valori efficaci).

Per completezza viene naturale definire anche la cosiddetta *potenza reattiva*, indicata con Q ed espressa dalla:

$$Q = VIsin\varphi \quad \textit{potenza reattiva in regime sinusoidale} \quad [var\ \ o\, VAR]$$

Il suo segno dipende dal segno del sinφ: positivo nel 1^ e 2^ quadrante, negativo altrove.

Le tre potenze P,Q,S così definite soddisfano un'importante e utile relazione che è:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

che fa pensare ad una loro rappresentazione grafica mediante un triangolo rettangolo del quale P e Q sono cateti e S è l'ipotenusa (*triangolo delle potenze*).

Le espressioni sopra ricavate possono essere particolarizzate per i singoli bipoli elementari, con i seguenti risultati:

- *per il resistore*
  - $\varphi = 0;$ $cos\varphi = 1;$ $sin\varphi=0$
  - $S = VI$ $P=VI=RI^2=V^2/R$ $Q=0$
- *per l'induttore*
  - $\varphi = \frac{\pi}{2};$ $cos\varphi = 0;$ $sin\varphi=1$
  - $S = VI$ $P=0$ $Q= VI=X_LI^2=V^2/X_L$
- *per il condensatore*
  - $\varphi = -\frac{\pi}{2};$ $cos\varphi = 0;$ $sin\varphi= - 1$
  - $S = VI$ $P=0$ $Q= - VI= - X_CI^2= - V^2/X_C$ *[VAR]*
    $Q_c= VI= X_CI^2= V^2/X_C$ *[VAC]*
- *per l'impedenza in genere*
  - φ $cos\varphi$ $sin\varphi$
  - $S = VI$ $P= VIcos\varphi$ $Q= VIsin\varphi$ *[VAR]*

NB: oltre alla potenza reattiva Q definita e misurata in VAR, risulta comodo impiegare in qualche caso una quantità uguale e contraria detta *potenza reattiva capacitiva* Q_{VAC} misurata in *volt·ampere capacitivi* [VAC]. Per contrapposizione la potenza reattiva Q è anche detta *potenza reattiva induttiva.*

La comodità la si riconosce in particolare quando la potenza reattiva (induttiva) è negativa, mentre quella capacitiva risulta allora positiva. È il caso per esempio dei condensatori.

Riprendiamo il circuito del nostro problema. La potenza istantanea p(t) da esso assorbita ed erogata dal generatore è per il principio di conservazione dell'energia dei sistemi fisici, pari alla somma delle potenze istantanee assorbite dai singoli componenti:

$$p(t) = p_R(t) + p_L(t) + p_C(t)$$

Questo bilancio vale ovviamente anche per i valori medi sicché otteniamo:

$$P = P_R + P_L + P_C$$

che costituisce il *principio di conservazione delle potenze attive*. Lo possiamo generalizzare nel seguente modo:

La somma delle potenze attive erogate dai componenti di un circuito per i quali si è scelta la convenzione di segno dei generatori è pari alla somma delle potenze attive assorbite dai rimanenti componenti per i quali si è scelta la convenzione di segno degli utilizzatori.

Si può dimostrare anche che vale il *principio di conservazione della potenza reattiva*:

La somma delle potenze reattive erogate dai componenti di un circuito per i quali si è scelta la convenzione di segno dei generatori è pari alla somma delle potenze reattive assorbite dai rimanenti componenti per i quali si è scelta la convenzione di segno degli utilizzatori.

Con riferimento al nostro circuito possiamo allora scrivere:

$$Q = Q_R + Q_L + Q_C$$

Nello specifico abbiamo, ricordando il comportamento dei bipoli elementari poco sopra elencato:

$$P = P_R + 0 + 0$$

$$Q = 0 + Q_L + Q_C$$

Quantitativamente:

$$P = VIcos\varphi = 110 \cdot 6.653\ cos 1.066_{[rad]} = 354.0 \quad W$$

$$P_R = V_R\, I = RI^2 = V^2/R = 53.26 \cdot 6.653 = 354.3\ W$$

$$Q = VIsin\varphi = 110 \cdot 6.653\ sin(-1.066_{[rad]}) = -640.6 \quad var \qquad (\equiv 640.6 \quad VAC)$$

$$Q_L = V_L\, I = X_L I^2 = V^2/X_L = 80.24 \cdot 6.653 = 533.8\ var \quad (\equiv -533.8\ VAC)$$

$$Q_C = -V_C\, I = -X_C I^2 = -V^2/X_L = -176.5 \cdot 6.653 = -1174\ var \quad (\equiv 1174\, VAC)$$

$$Q_L + Q_C = 553.8 - 1174 = -640.2 \quad var \qquad (\equiv 640.2\ VAC)$$

E' immediata la verifica che la potenza apparente erogata dal generatore e assorbita dal circuito NON è pari alla somma delle potenze apparenti assorbite dai singoli componenti del circuito.

Le potenze apparenti non rispettano il principio di conservazione delle potenze.

NON si applica il bilancio delle potenze usando le potenze apparenti!

16.3 Risonanza RLC serie

Il circuito in esame, con i tre bipoli elementari RLC in serie, invita ad approfondire un particolare comportamento dei circuiti in regime sinusoidale che è quello della *risonanza serie* o, semplicemente, *risonanza*.

Dalle equazioni scritte, dagli andamenti temporali, così come dai diagrammi vettoriali, possiamo vedere che le tensioni sull'induttore e sul condensatore, <u>sottoposti alla stessa corrente</u>, si cancellano parzialmente l'una l'altra (i vettori hanno stessa direzione e versi opposti).

Nel caso particolare in cui le reattanze induttiva e capacitiva siano identiche ($X_L = X_C$) le due tensioni sull'induttore e sul condensatore sono esattamente uguali ed opposte (stesso valore efficace (stessa ampiezza), ma sfasamento reciproco pari a 180°) e non danno alcun contributo alla tensio totale, qualsiasi sia la loro ampiezza.

Questo accade quando

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

ossia

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad (condizione\ di\ risonanza)$$

che rappresenta la *condizione di risonanza serie o di risonanza*

Per esempio, per il nostro circuito la condizione di risonanza, con i parametri dati si manifesterebbe per la pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 0.1 \cdot 10^{-3}}} = 559\ rad/s \quad (pari\ f = 88.97\ Hz)$$

per la quale si ha X_L= X_C= 17.89 Ω.

L'impedenza totale sarebbe pari a Z_{eq} = R= 8 Ω e pertanto il valore efficace della corrente I =110/8 =13.75 A.

Ad essa corrispondono le tensioni su L e su C di valore efficace V_L= V_C= X_LI = 17.89·13.75=246 V, più del doppio della tensione efficace del generatore.

In effetti il fenomeno della risonanza serie è a volte sfruttato per elevare la tensione su un condensatore (o un carico capacitivo anche più complesso) mettendo in serie un'induttanza, o viceversa per alzare la tensione su un induttore mettendo in serie una capacità.

Autovalutazione*: disegnare il diagramma vettoriale in questo caso di risonanza serie.*

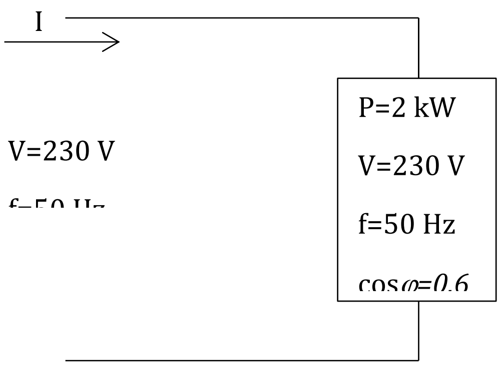
NB: Addirittura, possiamo immaginare il caso in cui la condizione di risonanza serie si manifesta mentre la resistenza (anche questa posta in serie ai bipoli L e C) sia infinitamente piccola, cioè sia un circuito ideale chiuso (di fatto quindi non c'è resistenza). Allora l'impedenza totale è nulla e la corrente tende all'infinito: il circuito complessivo LC si comporta come un corto circuito. Con corrente infinitamente grande tali sono anche le tensioni su L e su C anche se la fem avesse un valore efficace modesto!

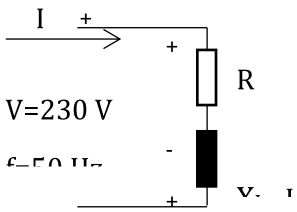
Capitolo 17 - Rifasamento

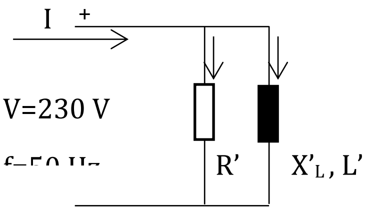
Problema 17.1: *Un carico monofase alimentato dalla rete pubblica ha i seguenti dati di targa: potenza attiva P=2 kW, tensione V= 230 V, frequenza f=50 Hz, cosφ =0.6 induttivo (si dice anche "in ritardo").*

Supposto che sia alimentato alla tensione alla frequenza nominali, si chiede:

a) *La corrente I assorbita dalla linea di alimentazione (corrente nominale);*
b) *Le potenze reattiva Q ed apparente S assorbite dal carico (potenze nominali);*
c) *L'energia assorbita dal carico En (fornita dalla linea) in 8 ore di servizio;*
d) *L'impedenza equivalente R,X prima serie e poi parallelo;*
e) *I diagrammi vettoriali delle tensioni e correnti nei due casi precedenti.*







Non è dato a sapere di che carico si tratti. Potrebbe essere anche un'utenza costituita da più carichi elementari (per esempio un laboratorio tecnico) che nel complesso presenta i parametri forniti.

a) Per il calcolo della corrente assorbita (non essendo specificato altro si deve intendere il valore efficace) basta ricordare l'espressione della potenza:

$$P = VIcos\varphi$$

che rovesciata ci consente di scrivere:

$$I = \frac{P}{Vcos\varphi} = \frac{2000}{230 \cdot 0.6} = 14.49\ A$$

Essa può essere considerata come *corrente nominale* del carico (potrebbe essere scritta sulla targa assieme agli altri dati di targa) perché calcolata con i valori nominali.

b) Le potenze reattiva Q e apparente S le otteniamo con le espressioni:

$$S = VI = \frac{P}{cos\varphi} = 230 \cdot 14.49 = 3333\, VA$$
$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{3333^2 - 2000^2} = 2666\, var$$

NB: Il calcolo della potenza reattiva Q attraverso la "differenza pitagorica" fra S e P non permette di stabilire il segno di Q. Il Problema dice però che il cosφ è induttivo (per vie brevi: "in ritardo") volendo così specificare che si tratta di un carico con corrente in ritardo rispetto alla tensione (tensione in anticipo rispetto alla corrente), ossia, per definizione, con φ>0 e senφ>0 e, pertanto Q>0.

Per la precisione

$$\varphi = arcos(0.6) = 53.13°$$

$$sin\varphi = +\sqrt{1 - cos\varphi^2} = 0.8$$

$$Q = VIsin\varphi = 230 \cdot 14.49 \cdot 0.8 = 2666\, var \quad (per\ verifica)$$

c) L'energia assorbita su intervalli Δt molto più lunghi del periodo T=1/f la calcoliamo dalla potenza attiva (potenza media su T)

$$En_{[J]} = P_{[W]} \cdot \Delta t_{[s]} = 2000 \cdot (8 \cdot 3600) = 57.6 \cdot 10^6\, Ws \equiv 57.6 \cdot 10^6\, J$$

oppure

$$En_{[kWh]} = P_{[kW]} \cdot \Delta t_{[h]} = 2 \cdot 8 = 16\ kWh$$

NB: ricordiamoci che: $En_{[kWh]} = En_{[J]}/3.6 \cdot 10^6$. In problemi pratici di questo tipo l'energia di 1 J è molto piccola. Un ferro da stiro che lavora qualche ora consuma milioni di joule!

d) Come detto non abbiamo informazioni sulla natura del carico e quindi neanche sulla sua configurazione circuitale. Possiamo però determinarne la sua *impedenza equivalente* R,X serie o parallelo. Equivalente significa che "è come se fosse così".

Se vogliamo trovare <u>l'impedenza equivalente R,X serie</u>, dobbiamo calcolare i parametri R e X_L di due bipoli elementari che disposti in serie come in alto a destra nella figura superiore, quando alimentati dalla tensione V e dalle frequenza f assorbono la potenza P, la corrente I calcolata e le potenze che sono state determinate.
Siccome la corrente è nota (I=14.49 A) e la potenza attiva di un resistore in regime sinusoidale si calcola con la $P=RI^2$, risulta immediato trovare che la resistenza vale

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{2000}{14.49^2} = 9.526\ \Omega$$

Con analoghe considerazioni troviamo

$$X_L = \frac{Q}{I^2} = \frac{2666}{14.49^2} = 12.70 \ \Omega$$

ossia

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{12.70}{2\pi 50} = 40.42\ 10^{-3}\ H \equiv 40.42\ mH$$

Per conferma, il modulo dell'impedenza vale:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{230}{14.49} = 15.87 \quad \Omega$$

ma anche

$$Z = \sqrt{R^2 + {X_L}^2} = \sqrt{9.526^2 + 12.70^2} = 15.88 \ \Omega$$

$$\dot{Z} = R + jX_L = 9.526 + j12.70 \quad (impedenza\ equivalente\ di\ due\ impedenze\ in\ serie)$$

Altra verifica che possiamo fare è la seguente, sulle tensioni dei bipoli e la risultante:

$$\mathrm{V_R} = RI = 9.526 \cdot 14.49 = 138.0 \ V$$
$$\mathrm{V_X} = \mathrm{X_L}I = 12.70 \cdot 14.49 = 184.0 \ V$$

Siccome le due tensioni sono dovute alla stessa corrente prima in R e poi in X e sono quindi in quadratura deve valere:

$$V = \sqrt{{\mathrm{V_R}}^2 + {\mathrm{V_X}}^2} = \sqrt{138^2 + 184^2} = 230 \ V \qquad (c.v.d)$$

Se vogliamo invece trovare l'impedenza equivalente R,X parallelo, dobbiamo calcolare i parametri R' e X_L' di due bipoli elementari che disposti in parallelo come in basso a destra nella figura superiore, quando alimentati dalla tensione V e dalle frequenza f assorbono la potenza P, la corrente I calcolata e le potenze che sono state determinate.
Siccome la tensione ai morsetti dei bipoli è nota (V=230 V) e la potenza attiva di un resistore in regime sinusoidale si calcola con la P= V^2/R', risulta immediato trovare che la resistenza vale

$$R' = \frac{V^2}{P} = \frac{230^2}{2000} = 26.45 \ \Omega$$

Con analoghe considerazioni troviamo:

$$X'_L = \frac{V^2}{Q} = \frac{230^2}{2666} = 19.84 \ \Omega$$

ossia

$$L' = \frac{X'_L}{\omega} = \frac{X'_L}{2\pi f} = \frac{19.84}{2\pi 50} = 63.15\ 10^{-3}\ H \equiv 63.15\ mH$$

Anche in questo caso possiamo fare qualche verifica. Possiamo verificare che l'impedenza equivalente dei due bipoli in parallelo è pari a quella equivalente della serie prima calcolata.
Il parallelo di due impedenze (complesse) si calcola con la:

$$\dot{Z} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}$$

e noi abbiamo

$$\dot{Z}_1 = R'$$
$$\dot{Z}_2 = jX'_L$$

Si deve trovare che

$$\dot{Z} = \frac{R'(jX'_L)}{R' + jX'_L} = \frac{26.45\ (j19.84)}{26.45 + j19.84} = 9.526 \ + j\ 12.70 \qquad (c.v.d)$$

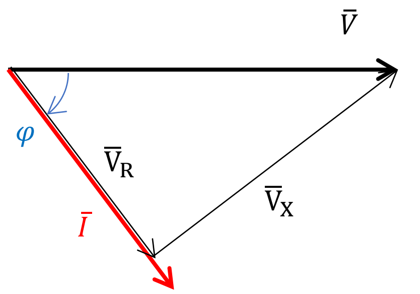
Altra verifica che possiamo fare è la seguente, sulle correnti dei bipoli e la risultante:

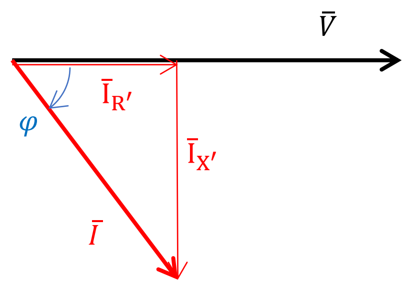
$$\mathrm{I}_{\mathrm{R}'} = \frac{V}{R'} = \frac{230}{26.45} = 8.696 \ A$$
$$\mathrm{I}_{\mathrm{X}'} = \frac{V}{X'_L} = \frac{230}{19.84} = 11.59 \ A$$

Siccome le due correnti sono dovute alla stessa tensione su R' e su X'_L e sono quindi in quadratura deve valere:

$$I = \sqrt{{\mathrm{I}_{\mathrm{R}'}}^2 + {\mathrm{I}_{\mathrm{X}'}}^2} = \sqrt{8.696^2 + 11.59^2} = 14.49 \ A \qquad (c.v.d)$$

e) I diagrammi vettoriali che descrivono le due schematizzazioni appena dettagliate hanno in comune la tensione $\bar{V}$ e la corrente $\bar{I}$. Nel primo caso la tensione è la somma di due contributi: $\bar{V}_R$ in fase con la corrente e $\bar{V}_X$ in quadratura in anticipo con la corrente; nel secondo caso è la corrente che è la somma di due contributi: $\bar{I}_{R'}$ in fase con la tensione e $\bar{V}_{X'}$ in quadratura in ritardo con la tensione. Le figure sotto riproducono quanto detto, disponendo, arbitrariamente, il vettore della tensione sull'asse reale (orizzontale).



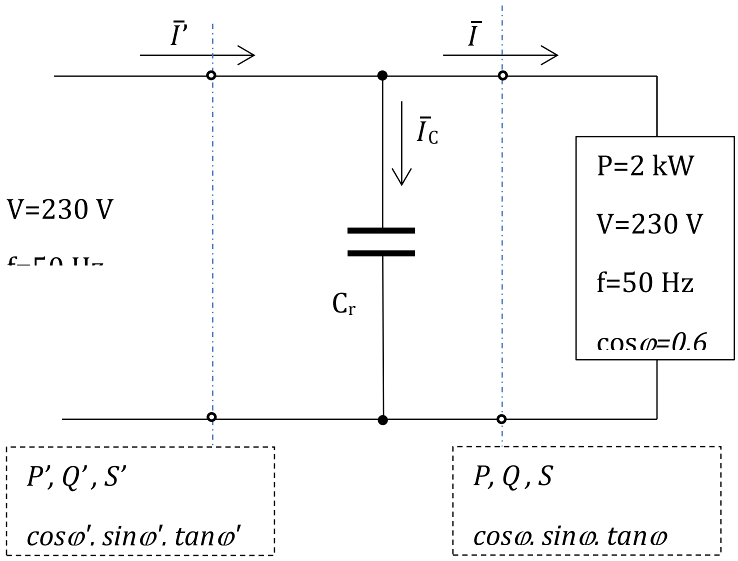


Problema 17.2: *Un carico monofase alimentato dalla rete pubblica ha i seguenti dati di targa: potenza attiva P=2 kW, tensione V= 230 V, frequenza f=50 Hz, cosφ =0.6 induttivo (si dice anche "in ritardo").*

Ai fini di ridurre sia la corrente di linea che l'assorbimento di potenza reattiva si richiede di progettare il condensatore di rifasamento C_r per rifasare l'impianto fino a cosφ' =0.95 induttivo, secondo lo schema di figura.

Supposto che il condensatore di rifasamento sia inserito e tutto l'impianto sia alimentato alla tensione alla frequenza nominali, si chiede:

a) *La corrente I' assorbita dalla linea di alimentazione;*
b) *Le potenze reale P', reattiva Q' ed apparente S' fornite dalla linea ;*
c) *L'energia En fornita dalla linea in 8 ore di servizio;*
d) *I diagrammi vettoriali delle tensioni e correnti.*



Il circuito (l'impianto) mostrato in figura lo possiamo esaminare da due diverse sezioni: ai morsetti del carico (a valle del condensatore di rifasamento) ove c'è la corrente I, e ai morsetti del punto di fornitura (a monte del condensatore di rifasamento) ove c'è la corrente I'. In entrambe le sezioni c'è la stessa tensione *V* (e la stessa frequenza *f* ovviamente). Il rifasamento consiste del compensare parte o tutta della potenza reattiva positiva assorbita dal carico con un potenza reattiva negativa assorbita da un condensatore, allo scopo disposto in parallelo al carico.

Il carico e le sue condizioni di alimentazione sono gli stessi del Problema 17.1 e quindi, senza rifare i conti, possiamo prendere quei risultati ed affermare che ai morsetti del carico abbiamo:

$$I = 14.49\ A$$

$$P = 2000\,W, \qquad Q = 2666\,var, \qquad S = 3333\,VA$$

$$cos\varphi = 0.6, \quad sin\varphi = 0.8, \quad tan\varphi = 1.333, \quad \varphi = 53.13°$$

Ai morsetti di alimentazione dell'intero impianto (morsetti della sezione di fornitura) <u>secondo le specifiche</u> del problema deve essere *cosφ' =0.95 (induttivo, con corrente in ritardo rispetto alla tensione)* e allora:

$$cos\varphi' = 0.95, \quad sin\varphi' = 0.3122, \quad tan\varphi' = 0.3287, \quad \varphi' = 18.19°$$

Ora, siccome un condensatore non impegna potenza attiva (ma solo reattiva) $P_C=0$, il bilancio delle potenze attive ci porta a scrivere:

$$P' = P_C + P = P = 2000\ W$$

L'inserimento del condensatore di rifasamento C_r in parallelo al carico non modifica la potenza attiva assorbita dall'impianto e fornita dalla linea di alimentazione, che rimane quella del carico originale.

Le varie potenze sono legate fra loro dalle ben note relazioni, fra le quali:

$$P' = P = VI'cos\varphi' = S'cos\varphi'$$
$$Q' = VI'sin\varphi' = S'sin\varphi' = P'tan\varphi'$$
$$S' = VI' = \frac{P'}{cos\varphi'} = \frac{Q'}{sin\varphi'}$$

Ma allora, essendo nota la potenza attiva P'=P, sono note anche le altre potenze che risultano:

$$Q' = P\ tan\varphi' = 2000 \cdot 0.3287 = 657.2\ var$$
$$S' = \frac{P}{cos\varphi'} = \frac{2000}{0.95} = 2105 \quad VA$$

ed anche infine:

$$I' = \frac{S'}{V} = 9.152\ A$$

Abbiamo così risposto ai quesiti a) e b), ma non abbiamo ancora calcolato il valore della capacità C_r.

È consuetudine calcolare la *potenza reattiva capacitiva (in [VAC]) di rifasamento. Per il bilancio delle potenze reattive dovremmo scrivere che quella totale è pari alla somma di quelle dei due carichi alimentati:*

$$Q'_{[var]} = Q_{C_{[var]}} + Q_{[var]} = -Q_{C_{[VAC]}} + Q_{[var]}$$

dalla quale otteniamo

$$Q_{C_{[VAC]}} = Q_{[var]} - Q'_{[var]}$$

che infine diventa, in funzione di dati fissi o noti:

$$Q_{C_{[VAC]}} = Ptan\varphi - P'tan\varphi' = P(tan\varphi - tan\varphi') \quad potenza\ reattiva\ capacitica\ di\ rifasamento$$

Questa è l'espressione con la quale si calcola la potenza reattiva dei condensatori di rifasamento di un carico di potenza attiva P il cui sfasamento è portato da φ a φ'.

È poi facile ottenere la capacità di rifasamento che serve ricordando l'espressione della potenza reattiva capacitiva

$$C_r = \frac{Q_{C_{[VAC]}}}{\omega V^2}$$

Applichiamolo al nostro caso:

$$Q_{C_{[VAC]}} = P(tan\varphi - tan\varphi') = Q_{[var]} - Q'_{[var]} = 2666 - 657.2 = 2009 \quad VAC$$

$$C_r = \frac{Q_{C_{[VAC]}}}{\omega V^2} = \frac{2009}{314.2 \cdot 230^2} = 120.9 \ 10^{-6}\, F \equiv 120.9 \ \mu F$$

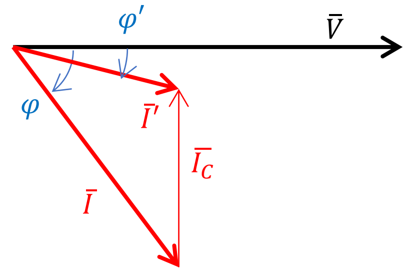
Si installerà pertanto un banco di condensatori da 120 μF (per esempio 6 condensatori in parallelo da 20 μF ciascuno), aventi una tensione di lavoro di (almeno) 230 V. Siccome ci possono essere sovratensioni causate da fulminazioni o manovre di interruttori sulla rete, i condensatori dovranno essere capaci di sostenere una tensione maggiore (tensione massima), che sarà almeno di 300 V, meglio 400 V.

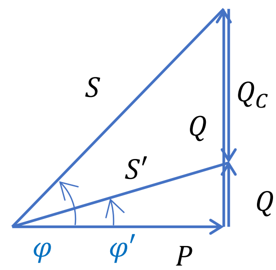
Per quanto riguarda il diagramma vettoriale delle correnti (la tensione è unica) esso deve mostrare il bilancio delle correnti al nodo che è (in forma vettoriale!!):

$$\bar{I}' = \bar{I}_C + \bar{I}$$

ove (prendendo la tensione sull'asse reale)

$$\bar{I}_C = j\omega C\,\bar{V} = j\,\frac{Q_{C\,[VAC]}}{V} = j\,\frac{2009}{230} = j\,8.735$$





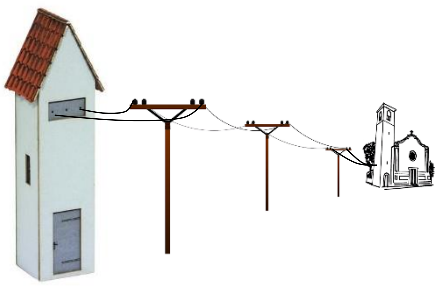
Il diagramma vettoriale è nella figura sopra a sinistra. Si vede come e perché la corrente si riduca conservando la componente $Icos\varphi = Icos\varphi'$ che è responsabile della potenza attiva.

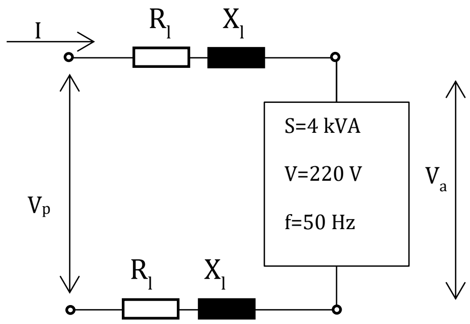
Possiamo fare anche un diagramma delle potenze, disponendo le potenze attive sull'asse orizzontale e quelle reattive su quello verticale. Per il nostro caso il diagramma è risulta come quello sopra di destra ove le potenze attive e reattive sono indicate con frecce per mostrarne anche il segno. Si vede come la potenza reattiva negativa (in [var]) del condensatore cancelli gran parte di quella assorbita dal carico.

Capitolo 18 - Linee e cavi di alimentazione

Problema 18.1: *Una chiesetta isolata è alimentata da una linea aerea monofase in rame, in corrente alternata a 50 Hz a partire da una cabina elettrica distante l=400 m (v. figura). La linea usa conduttori di rame dalla sezione di $S=12\ mm^2$. L'induttanza di ciascun conduttore per unità di lunghezza è stimata pari a $L_x=1.0\ mH/km$. Si vuole una tensione di arrivo di almeno $V_a = 220\ V$, alla quale il massimo carico monofase previsto è di S=4.0 kVA con $cos\varphi = 0.80$ (induttivo). Determinare, in quelle condizioni:*

a) La tensione V_p (valore efficace) da applicare alla partenza della linea (ai morsetti della cabina);
b) La potenza P_{linea} dissipata in linea (perdite di linea)
c) L'energia consumata dal carico (all'arrivo della linea, ove saranno posti i contatori) in 4 ore di funzionamento alla massima potenza.





Questo è un tipico problema di verifica di una linea di alimentazione di un'utenza, in questo caso di una linea aerea con conduttori nudi.

Ciascun conduttore di linea (conduttore di rame lungo 400 m) avrà una sua resistenza elettrica R_l che possiamo facilmente calcolare (si è preso la resistività del rame a 30 °C):

$$R_l = \rho \frac{l}{S} = 0.018_{[\Omega \mathrm{mm}^2/m]} \frac{400_{[m]}}{12_{[\mathrm{mm}^2]}} = 0.600 \quad \Omega$$

La linea aerea, dai suoi morsetti di partenza a quelli di arrivo, forma una spira (circuito chiuso) che quando percorso da corrente crea un campo magnetico il quale, a sua volta, determina un flusso magnetico (auto)concatenato con la spira stessa. Alla spira si può allora assegnare un'induttanza L (rapporto fra flusso concatenato e corrente che lo ha prodotto). Tale coefficiente dipenderò dai parametri geometrici: diametro del conduttore, distanza fra i conduttori, lunghezza della linea. Quest'ultimo è il dato di maggiore variabilità e, fissati gli altri due, l'induttanza varia linearmente con esso. *E' allora consuetudine pratica definire l'induttanza per unità di lunghezza della linea ad assegnarla (arbitrariamente) metà ad un conduttore e metà all'altro come è per la resistenza.* Questo spiega la definizione dell'induttanza L_x per unità di lunghezza assegnata nei dati del problema (induttanza chilometrica in questo caso). Seguendo questo ragionamento, la reattanza (induttiva) X_l di ciascun conduttore è:

$$X_l = \omega L_l = \omega(l \cdot L_x) = 314.2 \cdot 0.4_{[km]} \cdot (1 \cdot 10^{-3})_{[H/km]} = 0.1257 \quad \Omega$$

Infine, per il carico possiamo completare i suoi dati con i seguenti (non tutti necessari per risolvere il problema):

$$\sin\varphi = 0.6, \qquad \tan\varphi = 0.75$$

$$P = S\cos\varphi = 4000 \cdot 0.8 = 3200 \quad W$$

$$Q = S\sin\varphi = 4000 \cdot 0.6 = 2400 \quad var$$

$$I = \frac{S}{V_a} = \frac{P}{V_a cos\varphi} = \frac{Q}{V_a sin\varphi} = \frac{4000}{220} = 18.18 \quad A$$

a) *Tensione di partenza*

Alla tensione in partenza della linea ci possiamo arrivare in almeno tre modi diversi.

1. <u>Soluzione con l'uso delle leggi di Kirchhoff</u>

Questo approccio richiede <u>necessariamente l'uso delle rappresentazioni simboliche</u>.

Adottando la convenzione di segno degli utilizzatori per ciascun bipolo (carico compreso) e per l'interoo circuito, possiamo scrivere:

$$\bar{V}_p = \bar{V}_a + 2 \cdot \bar{I}\,(R_l + jX_l)$$

Il valore efficace cercato della tensione $\bar{V}_p$ sarà infine pari al modulo della rappresentazione simbolica.

Incominciamo col fissare, arbitrariamente, la tensione $\bar{V}_a$ sull'asse reale, cioè assumiamo che sia:

$$\bar{V}_a = V_a = 220 + j0$$

Allora essendo la corrente $\bar{I}$ in ritardo dell'angolo φ rispetto alla tensione $\bar{V}_a$ essa sarà:

$$\bar{I} = Ie^{-j\varphi} = I(\cos\varphi - j\sin\varphi) = 18.18\,(0.8 - j0.6) = 14.54 - j10.91$$

Infine:

$$\bar{V}_p = \bar{V}_a + 2 \cdot \bar{I}\,(R_l + jX_l) = 220 + 2 \cdot (14.54 - j10.91)(0.6 + j0.1257) = 240.2 - j\,9.437$$

per cui la tensione cercata è:

$$V_p = |\bar{V}_p| = \sqrt{240.2^2 + 9.437^2} = 240.4 \quad V$$

Autovalutazione: fare il diagramma vettoriale delle tensioni e della corrente

2. <u>Soluzione con l'uso della formula di Kapp</u>

La formula di Kapp è una formula pratica che consente di risolvere il problema senza ricorrere alle rappresentazioni simboliche, ma facendo uso solo dei valori efficaci (o, in alternativa, delle potenze). Essa è una formula approssimata, ma che dà risultati accettabilmente corretti quando la differenza dei valori efficaci delle tensioni di partenza e di arrivo è piccola, come è nelle pratiche applicazioni.

Il bilancio delle tensioni sopra scritto, con la tensione $\bar{V}_a$ posta sull'asse reale, si può ordinare in questo modo:

$$\bar{V}_p = \bar{V}_a + 2 \cdot \bar{I}(R_l + jX_l) = V_a + 2 \cdot I(\cos\varphi - j\sin\varphi)(R_l + jX_l) =$$

$$= [V_a + 2 \cdot I(R_l \cos\varphi + X_l \sin\varphi)] + j\,[2 \cdot I(X_l \cos\varphi - R_l \sin\varphi)]$$

Quando le cadute di tensione di linea sono piccole, coemnel caso del nostro problema e di quasi tutti i problemi di questi tipo, la parte reale della tensione $\bar{V}_p$ è molto maggiore della parte immaginaria (nel nostro problema 240.2 contro 9.437).

Il modulo della rappresentazione simbolica, che è il valore efficace cercato, si può quindi confondere con la parte reale e scrivere:

$$V_p \cong V_a + 2 \cdot I(R_l \cos\varphi + X_l \sin\varphi)$$

Si definisce *caduta di tensione di Kapp o caduta di tensione di linea* la quantità:

$$\boxed{\Delta V = 2 \cdot I(R_l \cos\varphi + X_l \sin\varphi) \qquad \textit{caduta di tensione di Kapp}}$$

con la quale si scrive questo bilancio delle tensioni efficaci (NON è rigorosamente l'applicazione della legge di Kirchhoff delle tensioni):

$$V_p \cong V_a + \Delta V$$

Con i dati del nostro problema:

$$\Delta V = 2 \cdot I(R_l cos\,\varphi + X_l\, sin\,\varphi) = 2 \cdot 18.18\,(0.6 \cdot 0.8 + 0.1257 \cdot 0.6\,) = 20.20 \quad V$$

$$V_p \cong V_a + \Delta V = 220 + 20.20 = 240.2 \quad V$$

La formula di Kapp, oltre al vantaggio di usare solo grandezze reali (valori efficaci, resistenze, reattanze) e non complesse, vedremo che è particolarmente vantaggiosa in problemi di progetto della linea piuttosto che di analisi come è in questo caso.

L'esame della formula di Kapp ci consente di riconoscere anche alcune importanti proprietà del comportamento di una linea di alimentazione, valide anche per le linee distribuzione o di trasmissione dell'energia elettrica. Vediamone alcune che poi quantificheremo con qualche Problema.

- Nel caso di *carichi di natura capacitiva* cioè con tensione in ritardo rispetto alla corrente ($\varphi < 0$) abbiamo sinφ<0 e il contributo $2 \cdot I \cdot X_l\, sin\,\varphi$ diventa di valore negativo. Esso compensa il primo contributo $2 \cdot I \cdot R_l\, cos\,\varphi$ o perfino lo può superare in valore assoluto (questo succede sempre con un carico puramente capacitivo $sin\varphi = -1$ e $cos\varphi = 0$). In definitiva:

  Con carichi di natura capacitiva la caduta di tensione in linea può diventare negativa ossia il valore efficace della tensione all'arrivo può maggiore di quello in partenza.

  Siccome la tensione in partenza è già, in generale, mantenuta sui valori più alti consentiti dalle tolleranze, questo comportamento non è accettabile. E' questo il motivo per cui il rifasamento di un carico induttivo si fa sempre evitando che il carico rifasato diventi capacitivo (il *cosφ* risultante dovrà essere comunque "induttivo")

- La formula di Kapp la possiamo esprimere anche in funzione delle potenze del carico alimentato dalla linea:

  $$\Delta V = 2 \cdot I(R_l cos\,\varphi + X_l\, sin\,\varphi)\frac{V_a}{V_a} = 2\,\frac{R_l V_a I cos\,\varphi + X_l V\, I sin\,\varphi}{V_a} = 2\,\frac{R_l\, P + X_l Q}{V_a}$$

  NB: la potenza reattiva Q è negativa nei carichi di natura capacitiva (vedi discussione precedente).

  Questa forma evidenzia peraltro il vantaggio nel fare il rifasamento dal punto di vista delle cadute di tensione che viene ridotta in quantità pari alla riduzione del secondo addendo dell'espressione.

  Più interessante diventa il risultato se calcoliamo la caduta di tensione percentuale (rispetto alla tensione in arrivo, che comunque sarà poco diversa da quella di partenza):

  $$\Delta V\% = \frac{\Delta V}{V_a}\, 100$$

che diventa:

$$\Delta V\% = 2\,\frac{R_l\,P\ + X_l Q}{V_a^2}\ 100$$

Quest'ultima espressione mostra che per trasportare grandi quantità di potenza attiva (e reattiva) mantenendo le cadute di tensione entro valori percentuali accettabili (solitamente inferiori al 10%) oltre alla riduzione dei valori della resistenza di linea R_l e dalla reattanza di linea X_l (che non si può ottenere più di tanto per ragioni fisiche e tecnologiche), è necessario aumentare la tensione dell'impianto elettrico. Così si passa dalla tensione di 230 V per la distribuzione domestica, ai 10.000 V per la distribuzione ai rioni della città, ai 60 kV per la fornitura di intere città o vallate, fino alle centinaia di kV per le linee di grande trasmissione dell'energia elettrica.

3. <u>Soluzione con l'uso del bilancio delle potenze</u>

Per evitare l'uso delle rappresentazioni simboliche per la soluzione di questo problema si può ricorrere al bilancio delle potenze attive e reattive.

Dopo aver calcolato la corrente del carico, che è anche la corrente che percorre i conduttori di linea possiamo calcolare la potenza attiva e reattiva assorbita dagli elementi della linea:

$$P_l = \ 2\,R_l\,I^2\ =\ 2\cdot 0.6\cdot 18.18^2\ =\ 396.6\ \ W$$

$$Q_l = \ 2\,X_l\,I^2\ =\ 2\cdot 0.1257\cdot 18.18^2\ =\ 83.09\ \ var$$

Il principio di conservazione delle potenze ci permette allora di valutare le potenze alla partenza della linea:

$$P_P = P + \ P_l = \ 3200\ + 396.6\ = 3597\ \ W$$

$$Q_p = Q + Q_l = \ 2400 + \ 83.09\ =\ 2483\ \ var$$

ed anche

$$S_p = \ \sqrt{P_p^2 + Q_p^2}\ =\ 4370\ \ VA$$

$$cos\varphi_p = \frac{P_P}{S_p}\ =\ \frac{3597}{4370}\ =\ 0.8231$$

Infine, essendo la corrente alla partenza la stessa di quella in arrivo (è la corrente di linea che è unica):

$$V_p = \frac{S_p}{I} = \ \frac{4370}{18.18} = 240.4\ \ \ V$$

Osserviamo che il fattore di potenza $cos\varphi_p$ alla partenza della linea è diverso dal $cos\varphi$ del carico (all'arrivo della linea).

b) Perdite di linea

Sono già state calcolate con la formula:

$$P_l = 2\, R_l\, I^2 = 2 \cdot 0.6 \cdot 18.18^2 = 396.6\ W$$

c) Energia consumata

Come già fatto nella soluzione di precedenti Problemi, calcoliamo questa energia attraverso la potenza attiva (potenza media):

$$En = P \cdot \Delta t = 3.200 \cdot 4 = 12.8\ kWh$$