

Fondamenti di Analisi Matematica e Probabilità

Esercizi di autoverifica, parte seconda , a.a. 2010-2011

Integrali curvilinei di prima specie

1. Trovare l'ascissa del baricentro della curva piana così definita: $x(t) = e^{2t} \cos t$, $y(t) = e^{2t} \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$.

2. Trovare la lunghezza delle seguenti curve:

i)

$$\begin{aligned}x(t) &= 1 - \cos t + (2 - t) \sin t \\y(t) &= \sin t + (2 - t) \cos t \\z(t) &= v,\end{aligned}$$

dove $0 \leq t \leq 2$.

ii)

$$\begin{aligned}x(t) &= (1 + \cos \theta) \cos \theta \\y(t) &= (1 + \cos \theta) \sin \theta,\end{aligned}$$

dove $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

3. Data la curva di equazioni

$$\begin{aligned}x(t) &= R \sin t \\y(t) &= R \cos t \\z(t) &= ht,\end{aligned}$$

dove $0 < t < 2$, determinare l'integrale su tale curva della funzione $f(x, y, z) = xyz$.

Forme differenziali lineari e loro integrali

1. Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{x^2}{(x^2 - y^2)^{1/2}} dx + \frac{xy}{x^2 + y^2} dy,$$

dove γ è la curva data da $y = x^2$ con $1/2 \leq x \leq 1/\sqrt{3}$ con l'orientamento delle x crescenti.

2. Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{x^2}{y} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy,$$

dove γ è la curva data dalle equazioni parametriche $x = \cos t$, $y = \sin t$ con $\pi/4 \leq t \leq \pi/2$.

3. Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, calcolare un potenziale:

$$\omega = [1 + \cos(x + y)] dx + \cos(x + y) dy.$$

Calcolare poi l'integrale di ω sulla curva definita come segue: $x = \cos^{47} t$, $y = \sin^{47} t$, con $0 \leq t \leq \pi/2$.

4. Dire se la seguente forma differenziale è esatta se ristretta al primo quadrante e, in caso affermativo, calcolare in tale insieme un suo potenziale:

$$\omega(x, y) = \frac{x + 2y}{x^3 y} dx + \frac{1}{x y^2} dy.$$

5. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si consideri la forma differenziale ω_k definita in $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ da

$$\omega_k(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} + 2xy^k e^{x^2 y} \right) dx + \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} + x^2 e^{x^2 y} \right) dy.$$

Determinare i valori di k per i quali ω_k risulta esatta in Ω . Per tali valori calcolare $\int_{\Gamma} \omega_k$ dove Γ è parametrizzata da

$$\phi : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = \left(\arctg \left[t^{1/3} \sin \left(\frac{t - \pi}{2} \right) + \frac{\sqrt{3} - 1}{\pi} + 5 \right]; (\sin t)^{3/2} + 1 \right).$$

6. Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \omega$ dove

$$\omega(x, y) = y^2 x^{-1} dx + 2y \log x dy$$

e γ è la curva parametrizzata da

$$\gamma(t) = (t, \arctg[2(2 - \sin^2 t)^{-1} \cos(3t)]) , \quad t \in [\pi/2, \pi].$$

7. Si calcoli l'integrale della forma differenziale

$$\omega(x, y) = y^2 dx + (x^2 + y^2) dy$$

lungo l'ellisse di equazioni $x^2 + y^2/4 = 1$ orientata in senso antiorario e percorsa una sola volta.

8. Stabilire in quali regioni del piano la forma differenziale

$$\frac{2(y - x)}{1 - (y - x)^2} dx + \frac{2(x - y)}{1 - (y - x)^2} dy$$

è esatta. Calcolare poi il suo integrale lungo la curva parametrizzata da

$$r(t) = \left(t, \frac{\sin(\pi t)}{2 + \cos t} + \frac{3}{2} + t \right) \quad t \in [0, 1].$$

9. Sia data la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{y(\log y - 1)}{x^2 + 1} dx + \arctan x \log y dy,$$

definita in $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$.

i. Si dica se ω è chiusa.

ii. Si dica se ω è esatta e se ne trovino tutte le eventuali primitive.

iii. Fra tutte le primitive si trovi quella che vale π nel punto $(-1, 1)$.

iv. Si calcoli $\int_{\gamma} \omega$ dove γ è la curva di equazione $y = -x^3 + 3$, $x \in [-1, 1]$.

10. Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - xy > 0\}$ e si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{y}{(xy - 1)^2} dx + \frac{ax + b}{(xy - 1)^2} dy$$

(i) Si disegni Ω nel piano. Ω è semplicemente connesso?

(ii) Si determinino $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che ω sia esatta in Ω .

(iii) Si trovi il potenziale U di ω in Ω tale che $U(0, 0) = 0$.

(iv) Sia γ la curva parametrizzata da $r(t) = (t^4, -t^3)$, $t \in [0, 1]$. Si calcoli l'integrale

$$\int_{\gamma} \omega.$$