

Fondamenti di Analisi Matematica e Probabilità

Esercizi di autoverifica, parte quarta, a.a. 2010-2011

Integrali di superficie e flussi.

1. Calcolare l'area di $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2/4 - x^2 - y^2 = 1, |z| \leq 4\}$.

2. Abbozzare un disegno e calcolare l'area delle seguenti superfici:

i)

$$\begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v \end{cases}$$

con $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 1$.

ii)

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2.$$

3. Calcolare l'area della superficie di equazioni

$$\begin{cases} x = e^u \sin v \\ y = e^u \cos v \\ z = \cos v \end{cases}$$

dove $0 \leq u \leq \log 4$, $\frac{\pi}{2} \leq v \leq \pi$.

4. Si calcoli il flusso del campo vettoriale $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $V(x, y, z) = (2x, 2y, z)$ attraverso la porzione di piano $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ orientata dal vettore normale $\mathbf{n} = (-1, -1, -1)$.

5. (20.6.1996) Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

uscente dalla superficie $\Sigma = \{(x, y, z) : z = 1 - x^2/2 - y^2, x^2/2 + y^2 < 1\}$ nel verso delle z negative (si scelga cioè l'orientamento ν di Σ che in $(0, 0, 1)$ coincide con $-\mathbf{e}_3$). [Risultato: $-\pi\sqrt{2}$.]

6. (11.6.98) Si disegni la superficie Σ di equazioni parametriche

$$\mathbf{r}(\vartheta, y) = (\sqrt{y^2 + 1} \cos \vartheta, y, \sqrt{y^2 + 1} \sin \vartheta), \quad \vartheta \in [0, 2\pi], |y| < 1$$

e si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{e}_1 + y/2\mathbf{e}_2 + x\mathbf{e}_3$$

uscente da Σ , orientata in modo che nel punto $(1, 0, 0)$ il versore normale coincida con $\mathbf{e}_1$. [Risultato: $-2\pi/3$.]