

Fondamenti di Analisi Matematica e Probabilità

Esercizi di autoverifica, parte quinta, a.a. 2010-2011

Massimi e minimi.

1. Determinare i punti critici della funzione $f(x, y) = \frac{1}{3}x^2 - xy^2 + 2y^3$ e dire se sono di massimo o di minimo locale o assoluto, o di sella.
2. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^3 + (x + y)^2$ si determinino gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo per f .
3. Determinare i punti critici della funzione $f(x, y) = (x^2 - 1)^2 - (y^2 - 1)^2$ e dire se sono di massimo o di minimo locale o assoluto, o di sella.
4. Dire se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^2 + y^2 + y^3$ ammette massimi o minimi locali o assoluti in $\mathbb{R}^2$.
5. Si studino al variare di $b \in \mathbb{R}$ i punti critici di $f(x, y) = x^2 - by^2 + \sin(x^2y^2)$ nella striscia $A = \{(x, y) : |y| < 1\}$.
6. Determinare i punti stazionari di $f(x, y, z) = x \sin z + y^2$ e dire se sono di massimo, minimo o sella.
7. Data la funzione $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, ricercare gli eventuali estremi relativi nei punti interni del triangolo T definito dalle disequazioni

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} ; 0 \leq y \leq x + \frac{\pi}{4}.$$

Calcolare inoltre il massimo e il minimo assoluti di f in T .

8. Si trovino i punti di massimo e minimo globale della funzione

$$f(x, y) = (x + y)^2(x - y)$$

nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1, (y - 1)/2 \leq x \leq (1 - y)/2\}$ e si studi la natura dei punti critici di f nell'interno di A .

Svolgimento. Si ha

$$\nabla f(x, y) = ((x + y)(3x - y), (x + y)(x - 3y)),$$

che si annulla sulla retta $y = -x$. Siccome $f(x, -x) = 0$ per ogni x e $f(x, y) \geq 0$ se $x \geq y$, si ha che per ogni $x < 0$ il punto $(x, -x)$ è di massimo relativo, mentre per $x > 0$ il punto $(x, -x)$ è di minimo relativo. L'origine non è né di massimo né di minimo.

Per determinare il massimo ed il minimo assoluti di f in A , osserviamo che, se si trovano sulla frontiera, questi sono massimi o minimi per f su un lato oppure sono i vertici. Cerchiamo quindi i punti critici di f su ciascuno dei

lati. Poniamo $\varphi_1(x) = f(x, -1)$, $-1 \leq x \leq 1$. Si ha $\varphi_1'(x) = -1 - 2x + 3x^2$, che si annulla per $x = 1$ e per $x = -1/3$. Si ha $\varphi_1(-1/3) = 32/27$. Poniamo ora $\varphi_2(x) = f(x, 1 - 2x)$, $0 \leq x \leq 1$. Si ha $\varphi_2'(x) = 5 - 14x + 9x^2$, che si annulla per $x = 1$ e per $x = 5/9$. Si ha $\varphi_2(5/9) = 32/243$. Poniamo infine $\varphi_3(x) = f(x, 2x + 1)$, $-1 \leq x \leq 0$. Si ha $\varphi_3'(x) = -7 - 30x - 27x^2$, che si annulla per $x = -1/3$ e per $x = -7/9$. Si ha $\varphi_3(-1/3) = 0$ e $\varphi_3(-7/9) = -32/81$. Bisogna infine controllare il valore di f sui vertici e poi confrontarli con i valori nei punti critici. Si ha $f(-1, -1) = f(1, -1) = 0$, mentre $f(0, 1) = -1$. Quindi il minimo assoluto è $f(0, 1)$, mentre il massimo assoluto è $f(-1/3, -1)$.

9. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2$$

- a) se ne trovino tutti i punti di massimo e minimo relativo,
- b) si dica se ammette massimo e minimo assoluto, e in caso affermativo li si calcoli;
- c) si trovino i punti di massimo e minimo assoluto di f vincolati al cerchio chiuso di centro l'origine e raggio 1.