

Fondamenti di Analisi Matematica e Probabilità

Esercizi di autoverifica, parte quinta, a.a. 2010-2011

Integrali multipli.

1. Sia R il rettangolo di vertici $A = (0, 0)$, $B = (\frac{\pi}{2}, 0)$, $C = (0, \pi)$, $D = (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Calcolare

$$\iint_R xy \cos(x+y) dx dy.$$

2. Sia $A = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x^2, -1 \leq x \leq 1\}$. Calcolare l'integrale

$$\iint_A (x^2 + y^2) dx dy.$$

3. Si calcoli $\iint_C xy dx dy$, dove

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 4, 0 \leq x^2 - y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Sugg.: si osservi che C può essere scritto come $C_1 \setminus C_2$, dove

$$\begin{aligned} C_1 &= \{1 \leq \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\} \\ C_2 &= \{0 \leq y \leq \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \sqrt{y^2 + 4} \leq x \leq 2\sqrt{4 - y^2}\}. \end{aligned}$$

Si può quindi calcolare

$$\iint_C xy dx dy = \iint_{C_1} xy dx dy - \iint_{C_2} xy dx dy$$

4. Si calcoli

$$\iint_I \frac{1}{(3-y)^2} dx dy$$

dove I è l'insieme limitato del piano (x, y) compreso fra le curve di equazioni $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$, rispettivamente.

5. Disegnare l'insieme

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x\}$$

e calcolarne il baricentro.

6. Si trovi il volume dell'intersezione tra il cono dato da $x^2 + y^2 < z^2$ e la sfera data da $x^2 + y^2 + z^2 < 2az$.

7. Si trovi il volume del solido compreso fra le superfici di equazioni $y = x^2$, $x = y^2$, $z = 0$, $z = y - x^2 + 12$.

8. Calcolare il volume del solido S così definito:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 3y^2 + z^2 \leq 1, 2x^2 + 3y^2 \leq 1/2\}.$$

(risultato: $\pi(2\sqrt{2} - 1)/3\sqrt{3}$).

9. Calcolare il volume ed il baricentro del solido

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3/2\}.$$

10. Calcolare il volume dell'insieme compreso tra il cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$, il piano $z = 0$ e la superficie $z = |x|$.

11. Calcolare il volume dell'insieme compreso tra la sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ e il cilindro $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

12. Determinare il volume del solido

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 > x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 < a^2\} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

13. Calcolare

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz,$$

dove $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 < x^2 + y^2 < a^2\}$ e $a \in \mathbb{R}$.

14. Sia $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, z^2 < x^2 + y^2 < ax\}$, ($a > 0$). Calcolare

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz.$$

15. Si disegni l'insieme

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq -\frac{x^2 + y^2}{3}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

e si calcoli

$$\iiint_C z dx dy dz.$$

16. Si calcoli l'integrale triplo

$$\iiint_D \frac{\log[3(x^2 + y^2 + z^2)]}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz,$$

dove $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 ; x, z \geq 0, y \leq 0\}$.