

Fondamenti di Analisi Matematica e Probabilità

Esercizi di autoverifica, parte quinta, a.a. 2010-2011

Esercizi sul flusso, il teorema della divergenza e il teorema di Stokes.

1. Si disegni il tronco di cono

$$S = \{(x, y, z) : (z - 2)^2 = 16x^2 + 16y^2, 0 \leq z \leq 2\}$$

e si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (5y, 5x, 6x^2 + 6y^2)$$

attraverso la superficie S orientata in modo che il vettore normale punti verso l'alto. Svolgere l'esercizio anche con un metodo diverso.

2. Sia

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - \sqrt{2})^2 + y^2 \leq 2, x + y + 2z \leq 6\sqrt{2}, z \geq 0\}.$$

- Abbozzare un disegno del solido D .
- Calcolare il volume di D .
- Dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{e}_1 + z\mathbf{e}_2$, si calcoli con il teorema della divergenza il flusso di $\mathbf{F}$ uscente da D .
- Calcolare il versore normale $\mathbf{n}$ uscente da D in ogni punto di ∂D dove esso esiste, e indicare i punti dove $\mathbf{n}$ non esiste.
- Calcolare l'area di ∂D .

3. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{x+y}\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j} + (z + 1)\mathbf{k}$$

attraverso la porzione di piano

$$S = \{(x, y, z) : x - 2y - z = 1, 0 \leq x + y \leq 1, 0 \leq x - y \leq 2\}$$

orientato concordemente al versore $-\mathbf{e}_3$.

4. Sia S la superficie parametrizzata da

$$\mathbf{r}(u, v) = (e^u \sin v, 3e^u \sin v, \cos v)$$

per $0 \leq u \leq \log 5$ e $\pi \leq v \leq \frac{3\pi}{2}$. Si calcoli

- a. l'area di S ,
- b. il flusso attraverso S del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z, 0, \cos x + y^2 - z).$$

5. Si consideri il solido

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 4z^2 - 1 < y^2, 0 < y < 2\}.$$

- a. Si disegni Ω ;
- b. se ne calcolino volume e baricentro.
- c. Si consideri la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \partial\Omega : 4x^2 + 4z^2 - 1 = y^2\},$$

la si parametrizzi con $\mathbf{r}(\theta, y) = (\phi(y) \cos \theta, y, \phi(y) \sin \theta)$ per una opportuna funzione ϕ , e si calcoli il vettore normale associato alla parametrizzazione;

- d. si calcoli il flusso attraverso S del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (3z, y^2, x^2)$, avendo orientato il versore normale in modo che in $(0, 0, 1/2)$ sia $\mathbf{e}_3$.

6. Date

$$F_1(x, y) = g(y) - y \cos x, \quad F_2(x, y) = x \cos y - \sin x,$$

- a. si determini la funzione g in modo che la forma differenziale $\omega = F_1 dx + F_2 dy$ sia esatta e $g(0) = 0$,
- b. si calcolino tutti i potenziali di ω .

Dati poi l'insieme $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 3, z \geq 0\}$ e il campo vettoriale

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3), \quad F_3(x, y, z) = 7x + \arctan z,$$

con la funzione g trovata al punto a,

- c. si riconosca che S è una superficie nota e la si disegni,
- d. si calcoli il flusso Φ del rotore di $\mathbf{F}$, $\text{rot}\mathbf{F}$, attraverso S orientata in modo che il versore normale $\mathbf{n}$ abbia la 3^a componente positiva. **Facoltativo:** ricalcolarlo con un secondo metodo diverso.