

Fondamenti di Analisi Matematica e Probabilità

Esercizi di autoverifica, parte sesta, a.a. 2010-2011

Equazioni differenziali.

1. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = \sqrt{\frac{1+u(x)}{1+x^2}} \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

per $\alpha = -1$ e $\alpha = 2$ e dire se le rispettive soluzioni sono definite per tutti gli $x \geq 0$. (Si ricordi che $\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$).

2. Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(x) + 2u'(x) + u(x) = \sin(x) \\ u(0) = \alpha, \quad u'(0) = \beta. \end{cases}$$

- i) Trovarne la soluzione nel caso $\alpha = \beta = 0$.
ii) Determinarne tutte le soluzioni e dire se esistono α, β per cui la corrispondente soluzione è 2π -periodica.

3. Per quali valori di $\lambda > 0$ la soluzione $u(x)$ di

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) \\ u(0) = 0 \quad u'(0) = \sqrt{\lambda} \end{cases}$$

verifica la condizione $u(\pi) = 0$? Fra queste soluzioni, ve n'è qualcuna strettamente positiva in $]0, \pi[$?

4. Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $y(x) = x \sin 2x$ sia soluzione dell'equazione differenziale

$$y''(x) + \alpha y(x) = 4 \cos 2x.$$

Determinare poi la soluzione $\tilde{y}$ dell'equazione trovata tale che $\tilde{y}(0) = 0$, $\tilde{y}'(0) = -2$.

5. Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione

$$y''' - \alpha y' = \sin(x)$$

ammette almeno una soluzione u tale che $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -\infty$. Determinare l'insieme di tali soluzioni.

6. Si determinino tutte le funzioni $y(x) \in C^2(\mathbb{R})$ che soddisfano contemporaneamente le tre condizioni seguenti:

i) $y''(x) - 4y(x) = e^{-2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

ii) $y'(0) = 0$;

iii) $y''(0) < 0$.

8. Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione

$$2y'' + y' + \frac{\alpha}{2}y = xe^{-x}$$

ammette almeno una soluzione $u(x)$ tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$. Determinare l'insieme di tali soluzioni.

8. Risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} u'(x) - u(x) - v(x) = x + 2 \\ v'(x) - u(x) - v(x) = xe^{2x} \end{cases}$$

Sistemi di equazioni differenziali: il “metodo di eliminazione”.

È noto dalla teoria che l'integrale generale del sistema lineare omogeneo autonomo di equazioni differenziali

$$x' = Ax$$

è uno spazio vettoriale di dimensione n (se A è una matrice $n \times n$). Nel caso di sistemi 2×2 , c'è un metodo di calcolo efficace – valido in generale – detto “metodo di eliminazione”, che riduce il sistema ad un'equazione di ordine 2.

Supponiamo di voler risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ x_1(0) = \xi_0 \\ x_2(0) = \eta_0 \end{cases}$$

Se $a_{12} \neq 0$ si può ricavare x_2 dalla prima equazione. Si ottiene

$$x_2 = (x_1' - a_{11}x_1)/a_{12}, \quad (3)$$

da cui, derivando,

$$x_2' = (x_1'' - a_{11}x_1')/a_{12}.$$

Inserendo le espressioni di x_2, x_2' nella seconda equazione se ne ottiene una di ordine 2 nella sola incognita x_1 :

$$(x_1'' - a_{11}x_1')/a_{12} = a_{21}x_1 + a_{22}(x_1' - a_{11}x_1)/a_{12}.$$

Di questa si può trovare l'integrale generale risolvendo l'equazione caratteristica; x_2 si ricava dalla (3) e si impongono le condizioni iniziali. Nel caso invece in cui $a_{12} = 0$ si risolve la prima equazione, nella quale non compare l'incognita x_2 ; si inserisce poi la soluzione x_1 nella seconda equazione e la si risolve separatamente.

Si osservi che la prima equazione del sistema fornisce anche la condizione iniziale $x_1'(0) = a_{11}\xi_0 + a_{12}\eta_0$. Il metodo può essere anche applicato a sistemi non omogenei.

Esercizio. Si consideri la funzione $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}(x_1, x_2) = (e^{x_1}(1-x_2), (x_2^2-1)\cos x_1 + \sin x_1)$. Si calcoli la matrice Jacobiana A di $\mathbf{F}$ in $(0, 1)$ e si trovi l'integrale generale del sistema

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t),$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{b}(t) = (0, \cos t)$.

Svolgimento. Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 + \cos t \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1. \end{cases}$$

Applicando il metodo di eliminazione si perviene all'equazione

$$x_1'' - 2x_1 + x_1 = -\cos t,$$

il cui integrale generale è

$$c_1 e^t + c_2 t e^t + \varphi(t),$$

dove φ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Il metodo dei coefficienti indeterminati suggerisce di cercare φ della forma $A \cos t + B \sin t$ e fornisce $A = 0$, $B = 1/2$. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$x_1(t) = t e^t / 2 + \sin t / 2, \quad x_2(t) = -x_1'(t) = -(e^t + t e^t + \cos t) / 2.$$

9. Risolvere i seguenti sistemi di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = y - 4x, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 2x + y + \cos t \\ y' = x + 2y, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x + y, & x(0) = 0, \\ y' = -2x - 2y + \sin 2t, & y(0) = 1. \end{cases}$$

10. Si calcoli la matrice Jacobiana A in $(0, 0)$ di $\mathbf{f}(x_1, x_2) = (\sin x_1 + 2x_2, x_1 e^{x_1 x_2} - \arctan x_2)$ e si trovi l'integrale generale del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

11. Sia $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, x_2) = (x_2 \cos e^{x_1}, \sin e^{x_1} + x_2 - 1)$. Si determini l'approssimazione affine di $\mathbf{f}$ intorno a $(0, 0)$ [cioè si determinino la matrice A ed il vettore $\mathbf{v}$ in modo che

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{v} + A\mathbf{x} + o(\mathbf{x}) \text{ per } \mathbf{x} \rightarrow (0, 0)]$$

e si calcoli l'integrale generale del sistema

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{v}.$$

Si dica infine se tale sistema ammette soluzioni limitate in $[0, +\infty)$.

NB: si svolgano anche gli esercizi del libro suggeriti.