

2. Un'urna contiene 5 palline bianche e 8 rosse. Estraiamo 3 palline senza reinserimento. Sia X_i uguale a 1 se la i -esima pallina estratta è bianca e sia uguale a 0 altrimenti. Si determini la densità discreta congiunta di
 - (a) X_1, X_2 ;
 - (b) X_1, X_2, X_3 .
3. Nell'Esercizio 2 supponiamo che le palline bianche siano numerate e sia Y_i uguale a 1 se la i -esima pallina bianca viene estratta e 0 altrimenti. Si determini la densità discreta congiunta di
 - (a) Y_1, Y_2 ;
 - (b) Y_1, Y_2, Y_3 .
6. Una scatola di transistor ne contiene 5, dei quali sappiamo che 2 sono difettosi. I transistor devono essere testati, uno alla volta, fino a che quelli difettosi vengono individuati. Denotiamo con N_1 il numero di test fatti per trovare il primo transistor difettoso e con N_2 il numero di ulteriori test necessari per trovare il secondo transistor difettoso. Si determini la densità discreta congiunta di N_1 e N_2 .
7. Si consideri una successione di prove indipendenti di Bernoulli, ognuna delle quali sia un successo con probabilità pari a p . Sia X_1 il numero aleatorio di insuccessi che precedono il primo successo e sia X_2 il numero aleatorio di insuccessi tra il primo e il secondo successo. Si determini la densità discreta congiunta di X_1 e X_2 .

9. La densità congiunta di X e Y è data da

$$f(x, y) = \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) \quad 0 < x < 1, 0 < y < 2$$

- (a) Si verifichi che è effettivamente una densità.
- (b) Si calcoli la densità marginale di X .
- (c) Si determini $P\{X > Y\}$.
- (d) Si determini $P\{Y > \frac{1}{2} | X < \frac{1}{2}\}$.
- (e) Si determini $E[X]$.
- (f) Si determini $E[Y]$.

10. La densità congiunta di X e Y è data da

$$f(x, y) = e^{-(x+y)} \quad 0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty$$

Si determini

- (a) $P\{X < Y\}$;
- (b) $P\{X < a\}$.

14. Un'ambulanza va su e giù per un tratto di strada di lunghezza L a velocità costante. In un certo momento avviene un incidente in un punto a caso sulla strada [Cioè, la distanza di questo punto dall'inizio del tratto di strada si distribuisce con legge uniforme sull'intervallo $(0, L)$.] Supponendo che la posizione dell'ambulanza in quell'istante, in maniera indipendente dell'incidente, sia anch'essa distribuita con legge uniforme su $(0, L)$, si calcoli la distribuzione della sua distanza dal luogo dell'incidente.

15. Il vettore aleatorio (X, Y) è detto essere distribuito uniformemente sulla regione R del piano, se, per una qualche costante c , la sua densità congiunta vale

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{se } (x, y) \in R \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Si provi che $1/c = \text{area della regione } R$.

Supponiamo che (X, Y) sia distribuito uniformemente sul quadrato di centro $(0, 0)$, e lato di lunghezza pari a 2.

(b) Si dimostri che X e Y sono indipendenti e ognuna è distribuita con legge uniforme su $(-1, 1)$.

(c) Qual è la probabilità che (X, Y) sia contenuto nel cerchio di raggio 1 centrato nell'origine? Cioè, si calcoli $P\{X^2 + Y^2 \leq 1\}$.

20. La densità congiunta di X e Y è data da

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

X e Y sono indipendenti? Lo sono anche se la densità $f(x, y)$ fosse data da

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & 0 < x < y, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

21. Sia

$$f(x, y) = 24xy \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1$$

e 0 altrove.

(a) Si mostri che $f(x, y)$ è la densità congiunta di un vettore aleatorio.

(b) Si determini $E[X]$.

(c) Si determini $E[Y]$.

22. La densità congiunta di X e Y è data da

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Sono X e Y indipendenti?

(b) Si calcoli la densità di X .

(c) Si determini $P\{X + Y < 1\}$.

23. Le variabili aleatorie X e Y hanno densità congiunta

$$f(x, y) = 12xy(1 - x) \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1$$

e 0 altrove.

- (a)** Sono X e Y indipendenti?
- (b)** Si determini $E[X]$.
- (c)** Si determini $E[Y]$.
- (d)** Si determini $\text{Var}(X)$.
- (e)** Si determini $\text{Var}(Y)$.