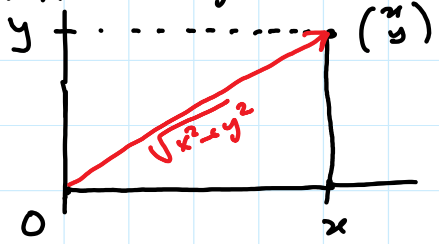
$\mathbb{R}^2 = \{ (x,y) : x, y \in \mathbb{R} \}$

Norma di (x,y):

$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$



PRODOTTO SCALARE: "$\cdot$"

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

ES $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2$

$$\Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} .$$

DIS. DI CAUCHY-SCHWARZ

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$$

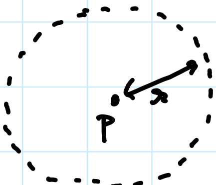
DISCHI APERTI e chiusi

$p \in \mathbb{R}^2 \quad r > 0$

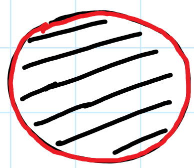
$B(p, r[= \{ x \in \mathbb{R}^2 : \|x - p\| < r \}$

$p = (p_1, p_2)$, $x = (x_1, x_2)$: $(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 < r^2$

disco aperto di centro p e raggio r

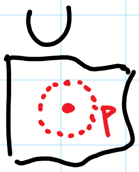


Disco chiuso: $B(p, r] = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \|x - p\| \leq r \}$.

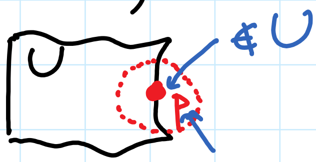


DEF. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è <u>intorno</u> di $p \in U$ se e solo se esiste $r>0$ tale che $B(p,r[\ \subseteq U$

($\Leftrightarrow$ $B(p,r]\ \subseteq U$)

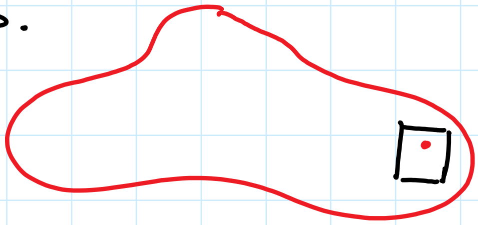
ES. 

sì: U è int. di p

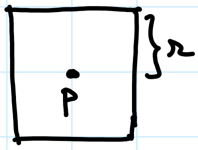


U non è int. di p.

ESERCIZIO. U è intorno di p se e solo se U contiene un quadrato (non degenere) contenente p.



$$Q((p_1,p_2),r] = [p_1-r,p_1+r]\times[p_2-r,p_2+r]$$



FUNZIONI A VALORI IN $\mathbb{R}^n$

↓ di una variabile.

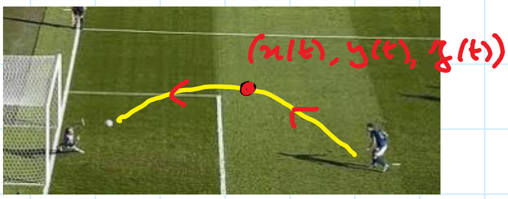
Sia $I=[a,b]$ un intervallo di $\mathbb{R}$. Una funzione definita su I a valori in $\mathbb{R}^n$ è

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longmapsto (f_1(t),\dots,f_n(t)) \quad \text{dove}$$

$f_1,\dots,f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

ES. $f(t) = (t^2, \cos t, e^t)$, $t\in[0,10]$ è una funzione da $[0,10]$ a valori in $\mathbb{R}^3$.

ESEMPIO Un pallone viene lanciato all'istante 0. All'istante t si trova nel punto $(x(t),y(t),z(t))$



$f(t) = (x(t),y(t),z(t))$ associa ad ogni istante t la posizione del pallone.

CURVA

Una curva in $\mathbb{R}^n$ è una **funzione CONTINUA** a valori in $\mathbb{R}^n$ definita su un intervallo di $\mathbb{R}$: $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ con $f_1, f_2, \dots, f_n$ funzioni continue.

ES: $f(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$ è una curva.

! Una curva è UNA FUNZIONE, quindi NON è un insieme di punti

DEF. Sia $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva.
Il **SOSTEGNO** di f è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ definito da:

$$\underbrace{\{ f(t) : t \in I \}} = \{ (f_1(t), \dots, f_n(t)) : t \in I \}$$

Si tratta dell'immagine di I tramite f

ES. Si lancia il pallone:

① CURVA: $t \longmapsto$ posizione del pallone

② Sostegno della curva: la traiettoria percorsa dal pallone