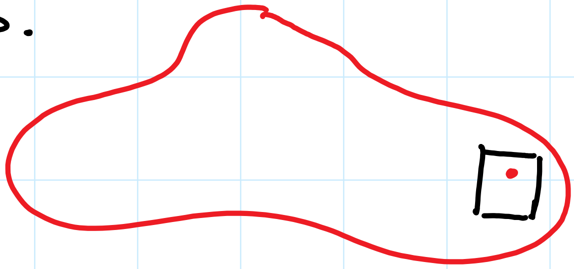
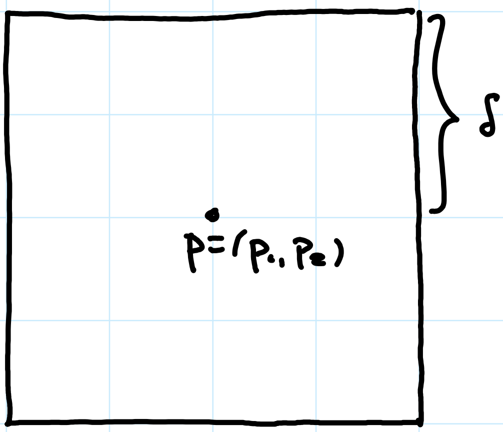
ESERCIZIO. U è intorno di p se e solo se U contiene un quadrato (non degenere) contenente p.

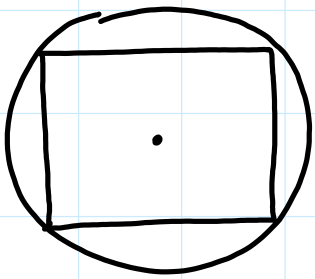


DEF. Quadrato $Q(p, \delta] = [p_1-\delta, p_1+\delta] \times [p_2-\delta, p_2+\delta]$



Soluzione dell'esercizio

1) $B(p, r] \supseteq Q(p, \frac{r}{\sqrt{2}}]$:



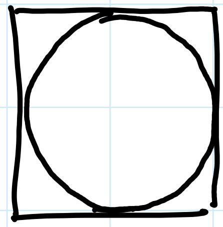
$$x=(x_1,x_2) \in Q(p, \tfrac{r}{\sqrt{2}}]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x_1-p_1| \le \frac{r}{\sqrt{2}} \\ |x_2-p_2| \le \frac{r}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow (x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2 \le r^2$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2) \in B(p, r]$$

$$|x_2 - p_2| \le \frac{r}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad (x_1, x_2) \in B(p, r]$$

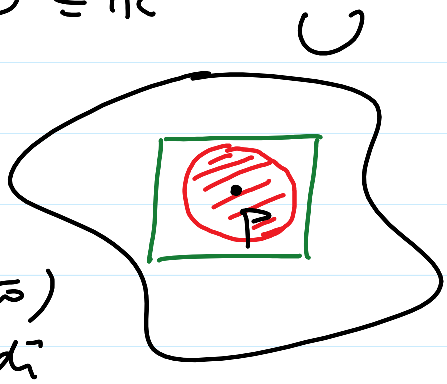
2) $Q(p, r] \supseteq B(p, r]$



NORMA in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^n$

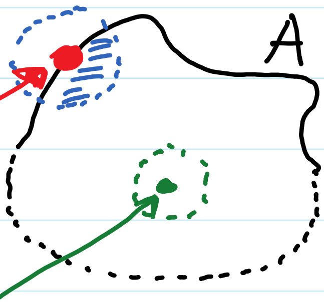
$x = (x_1, \dots, x_n)$ $\qquad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

DEFINIZIONE. Sia $p \in \mathbb{R}^n$, $p \in U \subseteq \mathbb{R}$
U è intorno di p se $\exists r$
$p \in B(p, r[\subseteq U$



($\Leftrightarrow$ esiste un cubo (o quadrato) non degenere contenuto in U di centro p)

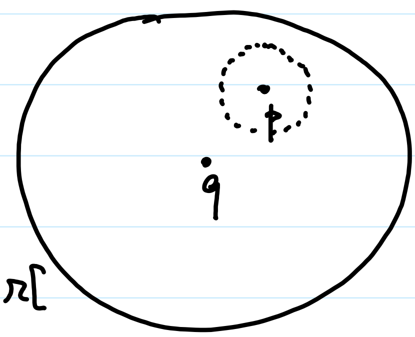
DEF. $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A è aperto se e solo se $\forall p \in A$ esiste $B(p, r[\subseteq A$.



Nell'esempio A non è aperto: ogni disco centrato in • contiene punti non appartenenti ad A. Invece A è intorno di •

ESEMPIO. $q \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$. Allora $B(q, r[$ è aperto.

Sia $p \in B(q, r[$: $\boxed{\|p - q\| < r}$
Fissiamo $\delta > 0$ e consideriamo $B(p, \delta[$. Ci chiediamo se per qualche δ si ha $B(p, \delta[\subseteq B(q, r[$
$x \in B(p, \delta[$



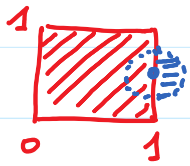
$$\|x-q\| = \|(x-p)+(p-q)\|$$
$$\leq \|x-p\| + \|p-q\|$$
$$< \delta + \|p-q\|$$

Affinché $\|x-q\|<r$ è sufficiente che

$\delta + \|p-q\| < r$ cioè $\delta < r - \|p-q\|$.

$\Rightarrow$ con tale scelta di δ si ha $B(q,\delta[\, \subseteq B(q,r[$.

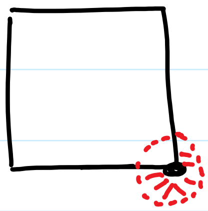
$\Rightarrow$ $B(q,r[$ è APERTO.



ESEMPIO. $[0,1]\times[0,1]=Q$

Q non è aperto: ad esempio

se $p=(1,0)$ $\forall r>0$ $B(p,r[\, \not\subseteq Q$



DEF. Una curva in $\mathbb{R}^n$ è una funzione

$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ continua.

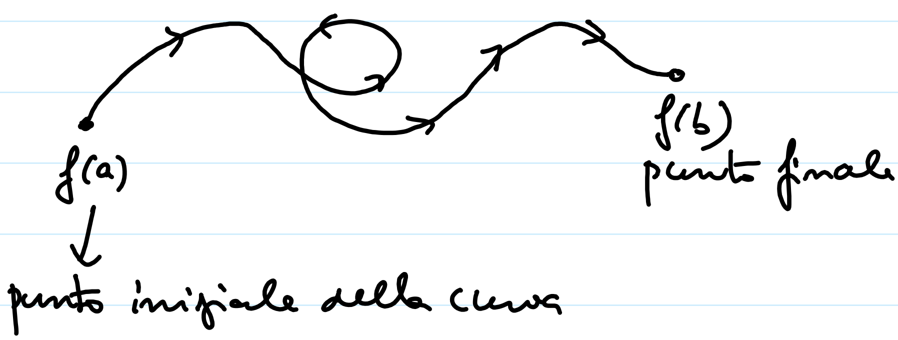
$\underbrace{f(t)} = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ con $f_1,\dots,f_n$ continue

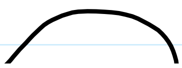
detta anche parametrizzazione della curva

Il sostegno di f è l'insieme $\{f(t): t\in[a,b]\}$.

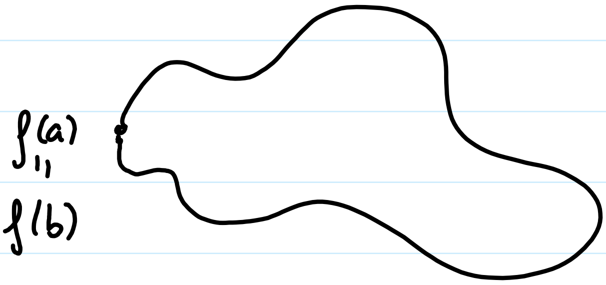
La curva è chiusa se

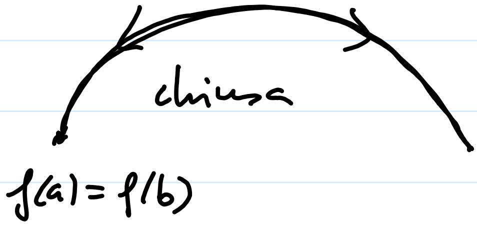
$f(a)=f(b)$





punto iniziale della curva

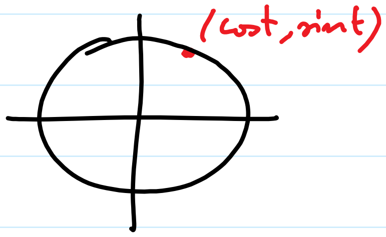




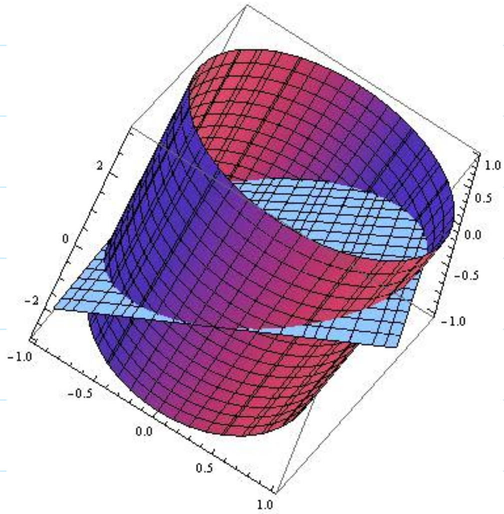
ESERCIZIO. Provare che l'insieme

$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2=1 \ e \ z = 2xy\}$ è il sostegno di una curva.

Sol $x^2+y^2=1 \Rightarrow$ esiste $t \in [0,2\pi]$ tale che



$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$



$z = 2x \Rightarrow$

$z = 2\cos t$

$\Rightarrow (x,y,z)$

$\quad\ \ \|$

$(\cos t, \sin t, 2\cos t)$.

Viceversa, ogni punto del tipo $(\cos t, \sin t, 2\cos t)$ è un punto di M: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ e $z = 2\cos t = 2x$

$\Rightarrow M$ è il sostegno di $\boxed{f(t) = (\cos t, \sin t, 2\cos t), \ t \in [0,2\pi]}$

ESEMPIO. Consideriamo l'insieme Σ dei punti (x,y) con $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$.

Provare che Σ è il sostegno di una curva.

OSS: Σ è simmetrico/asse x, asse y, all'origine:

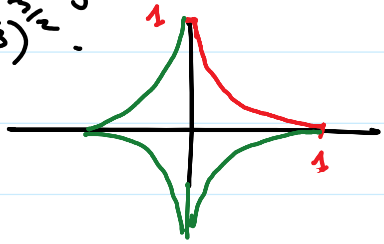
$(x,y) \in \Sigma \Rightarrow (x,-y), (-x,y), (-x,-y), \ldots \in \Sigma$

$\Rightarrow$ basta tracciarlo su $x \geq 0, y \geq 0$: $y^{2/3} + x^{2/3} = 1$

$y^{2/3} = 1 - x^{2/3} \Rightarrow x \leq 1$ e $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$

$\Rightarrow$ basta tracciarlo su $x \geq 0, y \geq 0$: $y^{2/3} + x^{2/3} = 1$

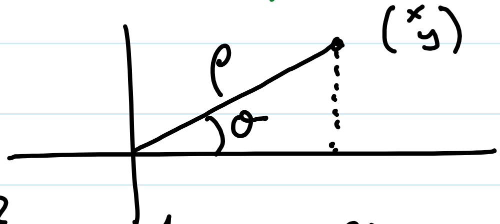
$y^{2/3} = 1 - x^{2/3} \Rightarrow x \leq 1$ e $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$.



ESEMPIO. $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione continua. Il grafico di h è $G_h := \{(x, h(x)) : x \in [a,b]\}$.

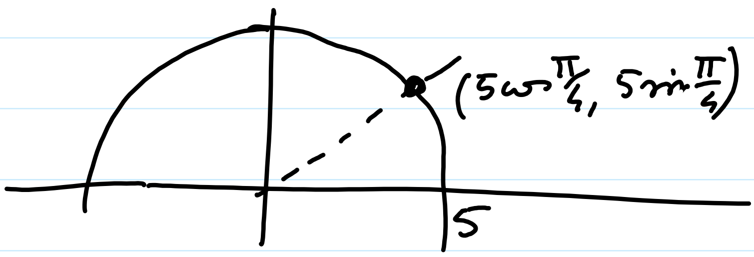
G_h è il sostegno della curva $x \in [a,b] \longmapsto (x, h(x))$.

Curve in coordinate polari:



Dato $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esistono $\rho \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$ tali che $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\nwarrow$ argomento.



$\rho = 5$
$\theta = \pi/4$

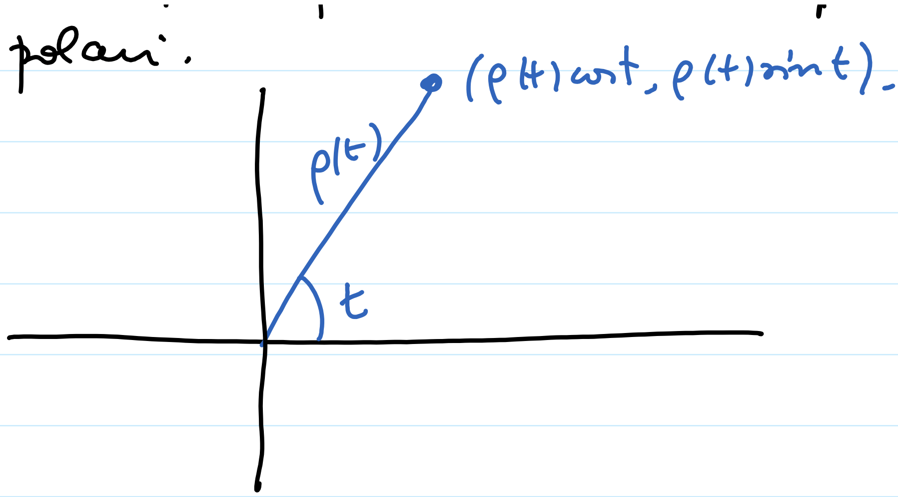
$\begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix}$

Se I è intervallo chiuso
$\rho : I \longrightarrow [0, +\infty[$ è una funzione continua e positiva.

La funzione $t \in I \longmapsto (\rho(t)\cos t, \rho(t)\sin t)$ è una curva: si parla di curva espressa in coordinate polari.

$(\rho(t)\cos t, \rho(t)\sin t)$.

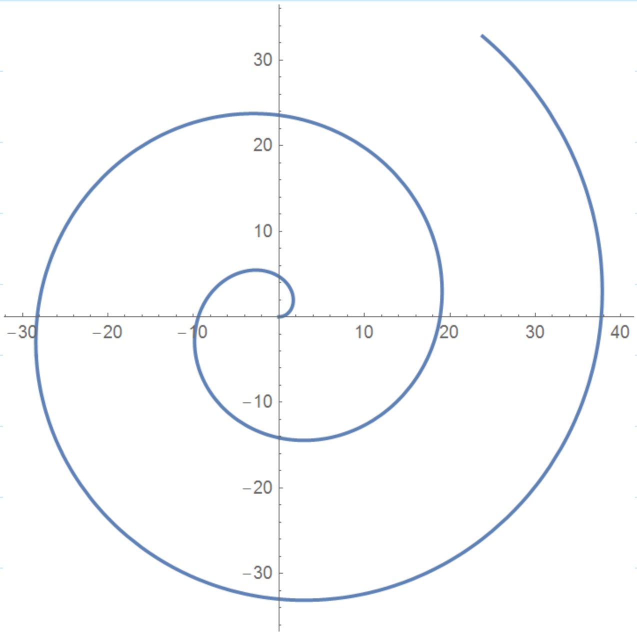
in coordinate polari:




curve

ESEMPIO Sostegno della curva in coordinate polari definita da $\rho(t) = 3t$, $t \in [0, 4\pi]$
Ciò significa che la curva è

$$f(t) = (3t\cos t, 3t \sin t).$$

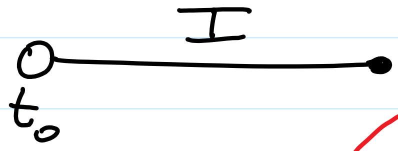


ES. $\rho(t) = 1 + \sin t \qquad t \in [0, 2\pi]$.

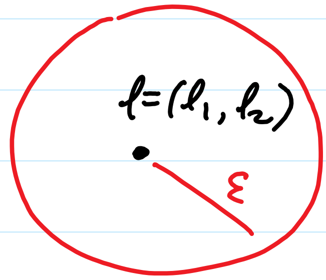
DEF. (limite) Sia $f : \underset{\text{intervallo}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

.

t_0 di accumulazione per I (ogni intorno di t_0 contiene punti di I diversi da t_0).



$\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = \ell$:



$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 :$

$$0 < |t - t_0| < \delta \implies f(t) \in B(\ell, \varepsilon[$$

OSS: equivalentemente $B(\ell, \varepsilon]$, $Q(\ell, \varepsilon]$, $Q(\ell, \varepsilon[\ldots$ al posto di $B(\ell, \varepsilon[$.

PROP. $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$, $\quad \ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$

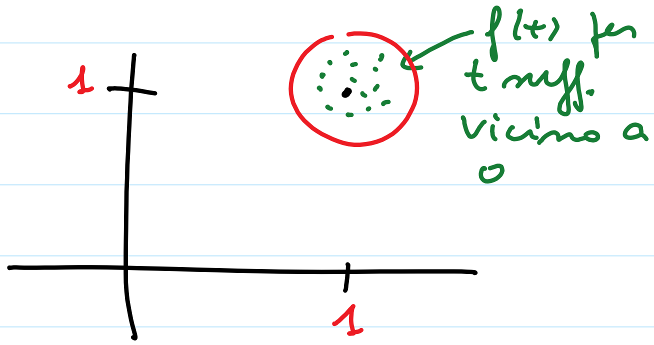
Allora $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = \ell \iff \underbrace{\lim\limits_{t \to t_0} f_i(t) = \ell_i}_{\text{limiti di funzioni } I \to \mathbb{R} \text{ Analisi Uno}} \quad \forall i = 1, \ldots, n.$

Dim: per casa (lez. 3)

ES $\quad f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, \cos t \right) \quad t \in]0, +\infty[$.

$\lim\limits_{t \to 0} f(t) = ?$ $\quad \lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, $\quad \lim\limits_{t \to 0} \cos t = \cos 0 = 1$

$\implies \lim\limits_{t \to 0} f(t) = (1, 1)$.



DERIVATA di una FUNZIONE $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0 \in [a,b]$.

la derivata di f in t_0, se esiste, è

il limite $\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ ← vettore : si indica con $f'(t_0)$

[Si tratta del $\lim_{t \to t_0} g(t)$, $g(t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ $(t \neq t_0)$)

OSS: f è derivabile in $t_0 \iff$ esiste il

limite $\underbrace{\lim_{t \to t_0} \frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}}_{\text{"}f_1'(t_0)}$, ..., $\underbrace{\lim_{t \to t_0} \frac{f_n(t) - f_n(t_0)}{t - t_0}}_{f_n'(t_0)}$

e in tal caso $f'(t_0) = (f_1'(t_0), .., f_n'(t_0))$

ES. $f(t) = (t, t^2, t^3)$

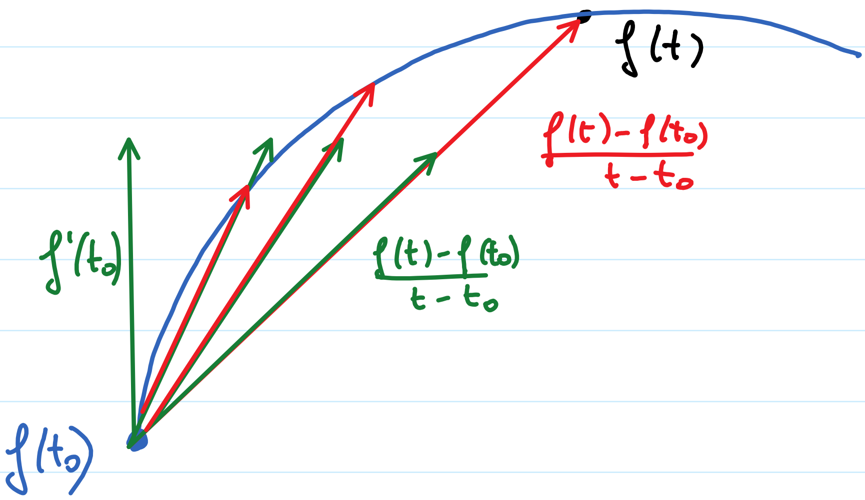
$f'(t) = (1, 2t, 3t^2)$

ES. $f(t) = P + t\vec{u}$ $\quad P, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$.

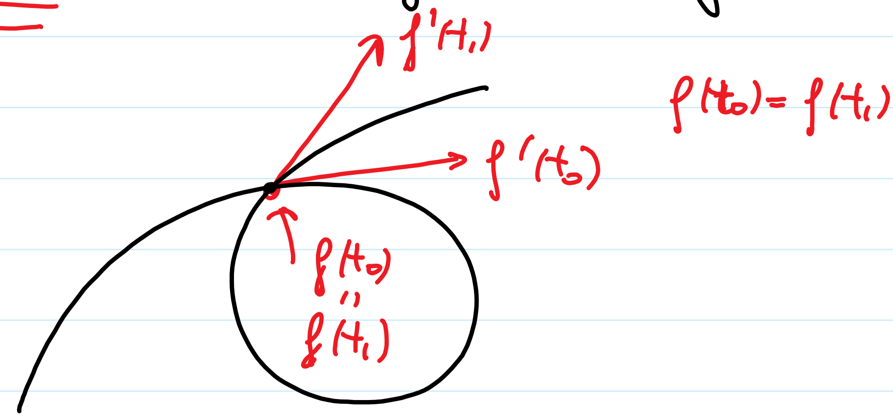
$= (p_1 + tu_1, p_2 + tu_2, .., p_n + tu_n)$

$f'(t) = (u_1, u_2, .., u_n)$.

Torniamo alla definizione: $\lim_{t \to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ $\in \mathbb{R}^n$ / $\in \mathbb{R}$



Se $f'(t_0)$ non è il vettore nullo si dice che $f'(t_0)$ è <u>un</u> vettore tangente a f in t_0.



DERIVATE e APPROSSIMAZIONE

Prop. $f: I \to \mathbb{R}^n$ derivabile in $t_0 \in I \Rightarrow$
$\exists R$ definita attorno a t_0 e

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + R(t) \quad \text{con}$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{R(t)}{t-t_0} = 0$$

Dim. $\lim_{t \to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = f'(t_0) \Leftrightarrow$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} - f'(t_0) = 0 \Leftrightarrow \lim \frac{f(t)-f(t_0) - f'(t_0)(t-t_0)}{t-t_0} = 0$$

$t \to t_0$

$$\Longleftrightarrow \lim_{t \to t_0} \frac{R(t)}{t-t_0} = 0, \text{ dove } R(t) := f(t) - f(t_0) - f'(t_0)(t-t_0)$$