Ricordiamo la definizione di limite $\lim_{t\to t_0} f(t) = \ell \in \mathbb{R}^2$:

$\forall V$ int. di ℓ $\exists \delta > 0 : 0 \neq |t - t_0| < \delta \Rightarrow f(t) \in V$ (*)

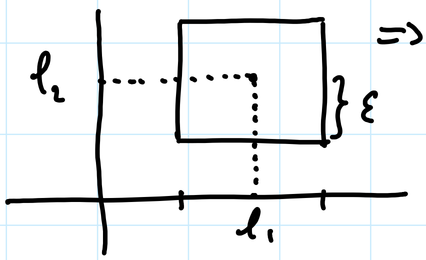
Prop. $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$, t_0 di acc. per I

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = \ell = (\ell_1, \ell_2) \iff \begin{cases} \lim_{t\to t_0} f_1(t) = \ell_1 \\ \lim_{t\to t_0} f_2(t) = \ell_2 \end{cases} \qquad (\square)$$

Dim. Valga (*), proviamo ($\square$).

Fissato $\varepsilon > 0$ scegliamo $V = Q[\ell, \varepsilon]$. Per (*) esiste $\delta > 0$: $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow f(t) \in Q[\ell, \varepsilon] \Rightarrow \begin{cases} |f_1(t) - \ell_1| \leq \varepsilon \\ |f_2(t) - \ell_2| \leq \varepsilon \end{cases}$

$\Rightarrow$ vale ($\square$)



Viceversa, valga ($\square$).

Fissato un intorno V di ℓ, sia $\varepsilon > 0$ tale che $Q[\ell, \varepsilon] \subseteq V$. Per ($\square$) esistono $\delta_1, \delta_2 > 0$:

$0 < |t - t_0| < \delta_1 \Rightarrow |f_1(t) - \ell_1| \leq \varepsilon$

$0 < |t - t_0| < \delta_2 \Rightarrow |f_2(t) - \ell_2| \leq \varepsilon$.

Ma allora, scelto $\delta = \mathrm{MIN}\{\delta_1, \delta_2\}$, per $0 < |t - t_0| < \delta$ si ha $(f_1(t), f_2(t)) \in Q(\ell, \varepsilon] \subseteq V$: vale quindi (*)

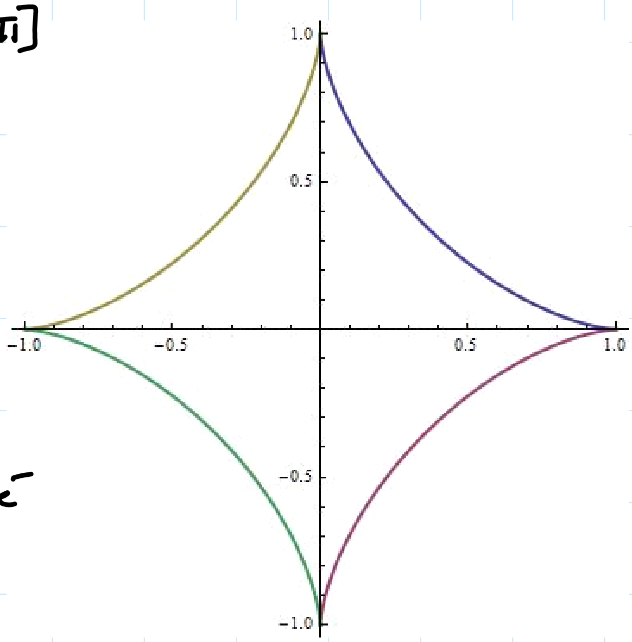
ESERCIZIO. (Asteroide)

$$\Sigma = \{ (x,y) : |x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1 \}.$$

Provare che Σ è il sostegno di una curva.

OSS: Se $u^2+v^2 = 1 \Leftrightarrow \exists\, t \in [0,2\pi]$

$u = \cos t$, $v = \sin t$



- Si ha

$(x,y) \in \Sigma \Rightarrow \left(|x|^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(|y|^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 1$

vi è quindi $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e

$|x|^{\frac{1}{3}} = \cos s$, $|y|^{\frac{1}{3}} = \sin s$, cioè

$|x| = \cos^3 s$ e $|y| = \sin^3 s$.

Ma allora esiste $t \in [0, 2\pi]$:

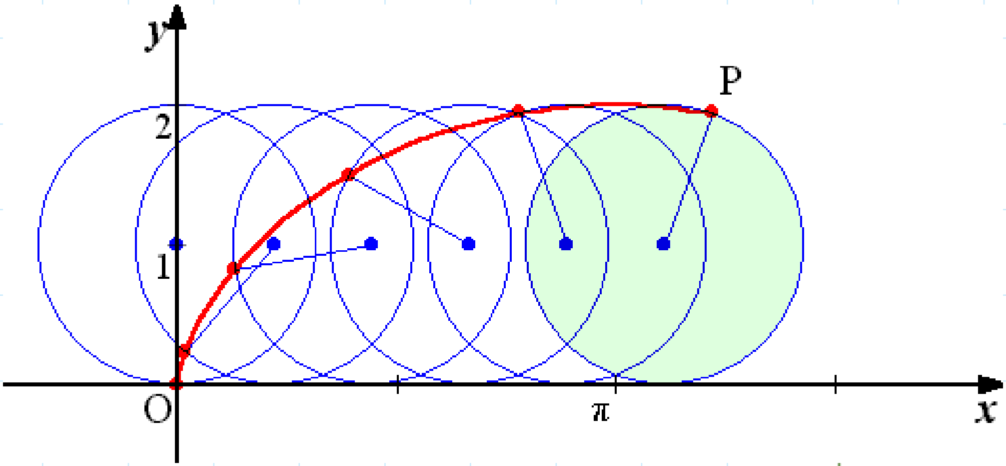
$x = \cos^3 t$ e $y = \sin^3 t$ (è $x = \pm\cos^3 s$, $y = \pm \sin^3 s$: se ad esempio $x = \cos^3 s$, $y = -\sin^3 s$ è $x = \cos^3(-s)$, $y = \sin^3(-s)$ sicché $x = \cos^3(2\pi - s)$, $y = \sin^3(2\pi - s)$, eccetera...)

Viceversa, se esiste $t \in [0, 2\pi]$ e $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$

$\Rightarrow |x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Rightarrow (x,y) \in \Sigma$

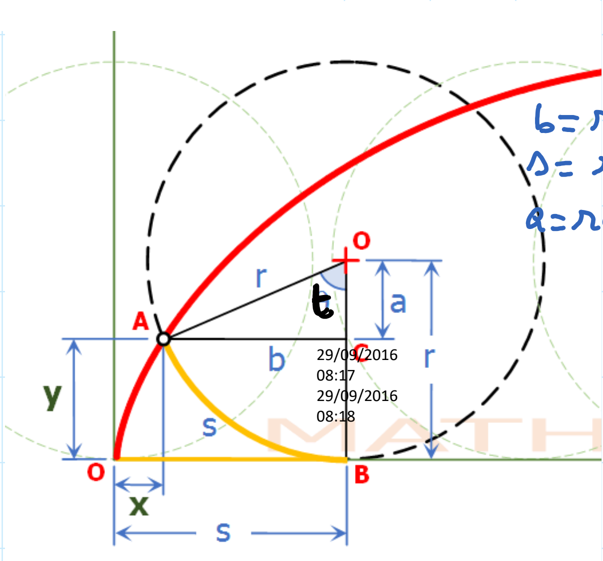
ESEMPIO: cicloide

https://www.youtube.com/watch?v=bUAbGXiBZng



Le coordinate del punto sono (angolo t)

$$\begin{cases} x(t) = rt - r\sin t \\ y(t) = r - r\cos t \end{cases}$$



29/09/2016 08:17
29/09/2016 08:18

Fisica Curva Cicloide

DERIVATA e retta tangente ad una curva in un punto.

$f: I \to \mathbb{R}^2 \qquad t_0 \in I \qquad f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$

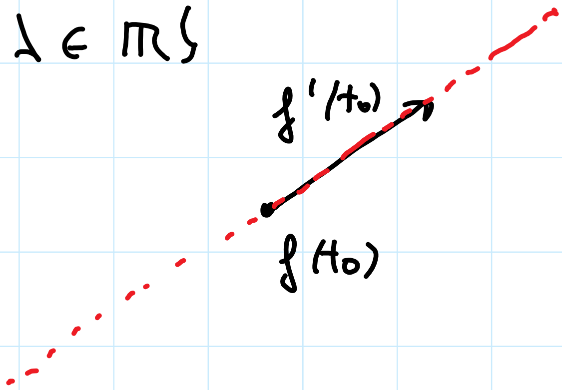
f derivabile in $t_0 \Rightarrow f(t) = \underbrace{f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)}_{\text{affine in } t} + R(t)$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{R(t)}{t - t_0} = 0$$

$f'(t_0) =$ vettore tangente (se $f'(t_0) \neq 0$) alla curva f in t_0

la retta passante per $f(t_0)$ e parallela a $f'(t_0) \neq 0$ si chiama la retta tangente a f in t_0:

$$\{ f(t_0) + \lambda f'(t_0) : \lambda \in \mathbb{R} \}$$



ES. f derivabile, $f(1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad f'(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$f(1.1) \approx f(1) + f'(1)(1.1 - 1) = f(1) + f'(1)(0.1)$$
$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times 0.1$$

ESEMPIO $f(t) = (t^2, e^t + 5t)$.

$f(0) = (0, 1)$ $\quad f'(t) = (2t, e^t + 5) \Rightarrow f'(0) = (0, 6)$.

DERIVATE.

$f, g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. derivabili in t_0.

$\alpha \in \mathbb{R}$.

- $f+g$ è derivabile in t_0 $\quad (f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$
- $(\alpha f)'(t_0) = \alpha f'(t_0)$
- pr. scalare

  $(f \cdot g)'(t_0) := f'(t_0) \cdot g(t_0) + f(t_0) \cdot g'(t_0)$

  derivabile in t_0 e

$$J \xrightarrow{\varphi} I \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$$

- $\varphi : J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow I \subseteq \mathbb{R}$ derivabile in t_0

  f derivabile in $\varphi(t_0)$

  $(f \circ \varphi)(t) := f(\varphi(t))$ è derivabile in t_0 e

  $(f \circ \varphi)'(t_0) = f'(\varphi(t_0))\, \varphi'(t_0)$

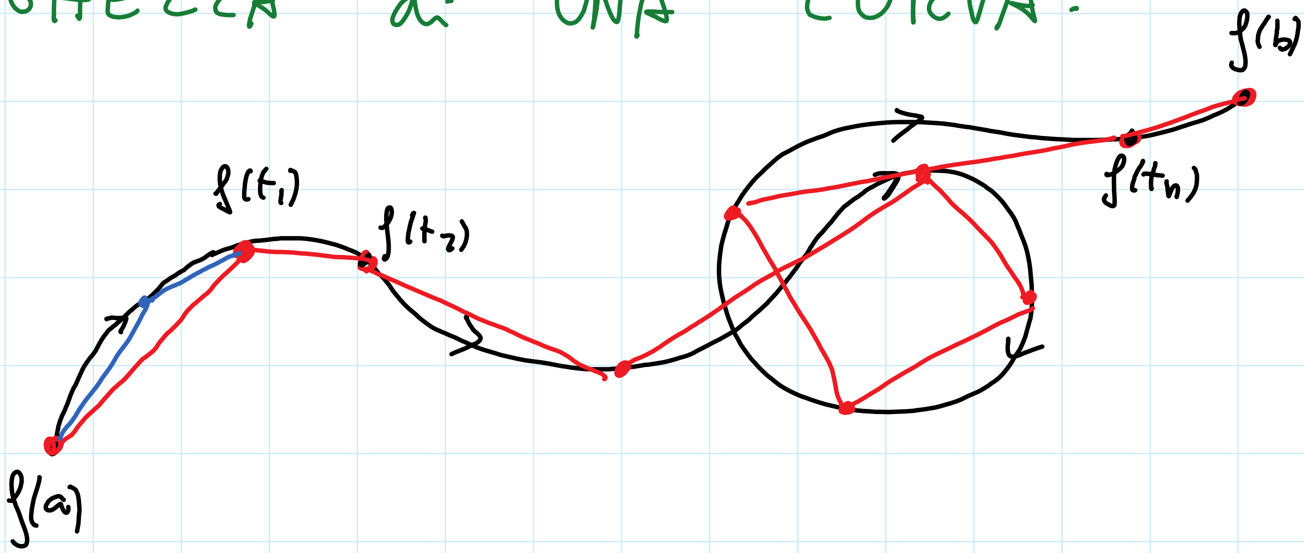
ESEMPIO

f derivabile ; $\quad \frac{d}{dt} f(\cos t) \overset{?}{=}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\text{''} \quad f'(\cos t)(-\sin t)$$

LUNGHEZZA di UNA CURVA.



$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < b = t_{n+1}$

$\|f(t_1) - f(a)\| + \dots + \|f(t_{n+1}) - f(t_n)\|$

DEF. Sia $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Si dice che f è "rettificabile" se è finito l'estremo superiore delle somme $\|f(t_1)-f(a)\| + \cdots + \|f(b)-f(t_n)\|$ al variare delle suddivisioni $a=t_0<t_1<\cdots<t_n<b=t_{n+1}$. In tal caso tale estremo superiore si chiama la LUNGHEZZA della curva f.

ESEMPIO. Segmento tra due punti P e Q.

$$f(t) = P + t\overrightarrow{PQ} \qquad t\in[\underset{\substack{\uparrow\\ a}}{0},\underset{\substack{\uparrow\\ b}}{1}]$$

Il segmento $[P,Q]$ è il sostegno di f.

Scegliamo una suddivisione $0=a=t_0<t_1<\cdots<t_n<\overset{\substack{1\\ \|}}{b}=t_{n+1}$

Calcoliamo $\|f(t_1)-f(t_0)\| + \cdots + \|f(b)-f(t_n)\|$.

$$f(t_{i+1}) - f(t_i) = (\cancel{P} + t_{i+1}\overrightarrow{PQ}) - (\cancel{P} + t_i\overrightarrow{PQ})$$
$$= (t_{i+1}-t_i)\overrightarrow{PQ}$$

$$\|f(t_{i+1})-f(t_i)\| = |t_{i+1}-t_i|\,\|\overrightarrow{PQ}\| = (t_{i+1}-t_i)\|\overrightarrow{PQ}\|$$

$$\|f(t_1)-f(t_0)\| + \cdots + \|f(b)-f(t_n)\|$$
$$= [(\cancel{t_1}-t_0) + (t_2-\cancel{t_1}) + \cdots + (b-\cancel{t_n})]\|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{PQ}\|$$

$\Rightarrow$ Lunghezza di $f = \|\overrightarrow{PQ}\|$

OSS. Chiaramente avremmo potuto trovare altre curve il cui sostegno è $[P,Q]$, come ad esempio $g(t) = P + (2t)\vec{PQ}$ con $t \in [0, \frac{1}{2}]$.
Si dimostra che se $g(t)$ è una "riparametrizzazione" di f del tipo $g(t) = f(\varphi(t))$ con $\varphi : J \longrightarrow I$ biiettiva e continua allora lunghezza(g) = lungh(f).
In altri casi ciò non succede (si pensi ad una parametrizzazione di $[P,Q]$ che va "avanti e indietro": la lunghezza verrebbe raddoppiata).

TEOREMA. Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1$ cioè f derivabile e f' continua. Allora f è rettificabile e

$$\text{Lungh}(f) = \int_a^b \|f'(t)\| \, dt$$
$$= \int_a^b \sqrt{(f_1'(t))^2 + \dots + (f_n'(t))^2} \, dt$$

ESEMPI. Cerchio raggio R centro O: sostegno di $f(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

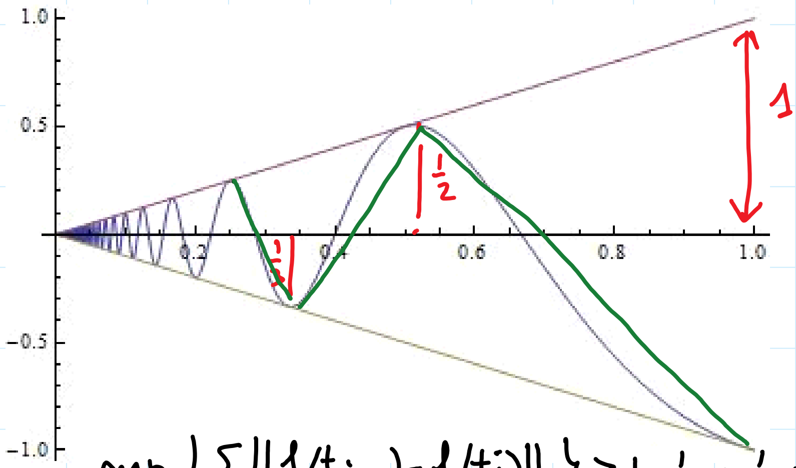
$f'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$
$\|f'(t)\|^2 = R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t = R^2 \Rightarrow \|f'(t)\| = R.$

$$\text{Lunghezza di } f = \int_0^{2\pi} R \, dt = 2\pi R.$$

ES. $f(t) = P + t\,\vec{PQ}$, $t \in [0,1]$. $\quad$ $\text{Lungh } f = \int_0^1 \|f'(t)\| \, dt = \dots \|\vec{PQ}\|.$

ESEMPIO. Una curva di lunghezza "infinita" (non rettificabile)

$t \mapsto f(t) = (t, t\cos\frac{\pi}{t})$



$\sup\{\sum \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\|\} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = +\infty$!!

MOTIVAZIONE della formula $L(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt$

a) Richiamo sull'integrale di funzioni di una variabile.

$g : [a,b] \longrightarrow [0, +\infty[\qquad g \geq 0.$

Somma di Riemann di g

$\downarrow$

$g(a)(t_1 - a) + g(t_1)(t_2 - t_1) + \ldots g(t_n)(b - t_n)$

Se g è continua, queste somme tendono a $\int_a^b g(t)dt$ al tendere a 0 della massima ampiezza degli intervallini.

ES. $g(t) = t^2 \qquad t_i = \frac{i}{n+1} \qquad i = 0, .., n+1 \qquad a=0, b=1$

$g(0)(t_1 - 0) + g(t_1)(t_2 - t_1) + \dots + g(t_n)(b - t_n)$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n+1}\right)^2 \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)^3} \sum_{i=0}^{n} i^2 \longrightarrow \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}$$

b) Motivazione della formula

$$f(t_{i+1}) - f(t_i) \approx f'(t_i)(t_{i+1} - t_i) \qquad (t_{i+1} - t_i \text{ "piccolo"})$$

$$\|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| \approx \|f'(t_i)\| (t_{i+1} - t_i)$$

$a < t_1 < \dots < t_{n+1} = b$

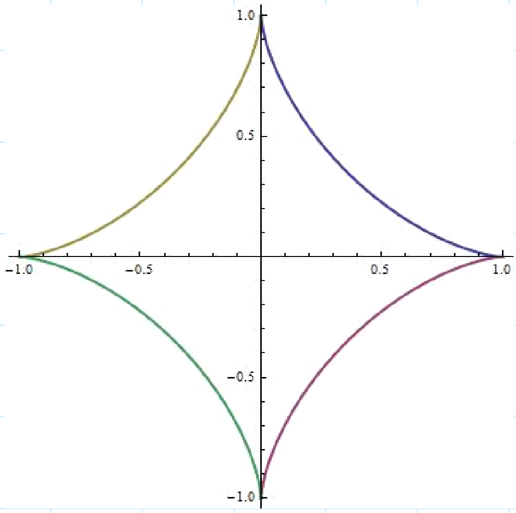
$$\|f(t_1) - f(a)\| + \dots + \|f(b) - f(t_n)\|$$

$$\approx \|f'(a)\|(t_1 - a) + \dots + \|f'(t_n)\|(b - t_n)$$

si tratta di una SOMMA di Riemann di $\|f'(t)\|$

Tali SOMME convergono a $\int_a^b \|f'(t)\| dt$ al tendere a 0 delle ampiezze degli intervalli.

ESEMPIO: lunghezza dell'asteroide



Lunghezza di $f(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$,
$t \in [0, 2\pi]$.

$$L = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt$$

$$f'(t) = (3\cos^2 t(-\sin t), 3\sin^2 t \cos t)$$

$$\|f'(t)\|^2 = 3^2 [(\cos^2 t \sin t)^2 + (\sin^2 t \cos t)^2]$$

$$= 3^2 [\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t]$$

$$= 3^2 \cos^2 t \sin^2 t \, (\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1}) = 3^2 \cos^2 t \sin^2 t$$

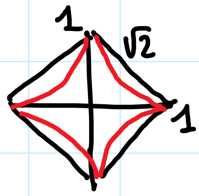
$$\Rightarrow \|f'(t)\| = \sqrt{3^2 \cos^2 t \sin^2 t} = 3|\cos t \sin t|$$

$$\text{Lunghezza di } f = \int_0^{2\pi} 3|\cos t \sin t| dt$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} |\sin 2t| dt \underset{u=2t}{=} \frac{3}{2} \int_0^{4\pi} |\sin u| \frac{1}{2} du$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^{4\pi} |\sin u| du = \frac{3}{4} \times 2 \int_0^{2\pi} |\sin u| du = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} |\sin u| du$$

$$= \frac{3}{2} \times 2 \int_0^{\pi} \sin u \, du = 3 [-\cos u]_0^{\pi} = 6.$$

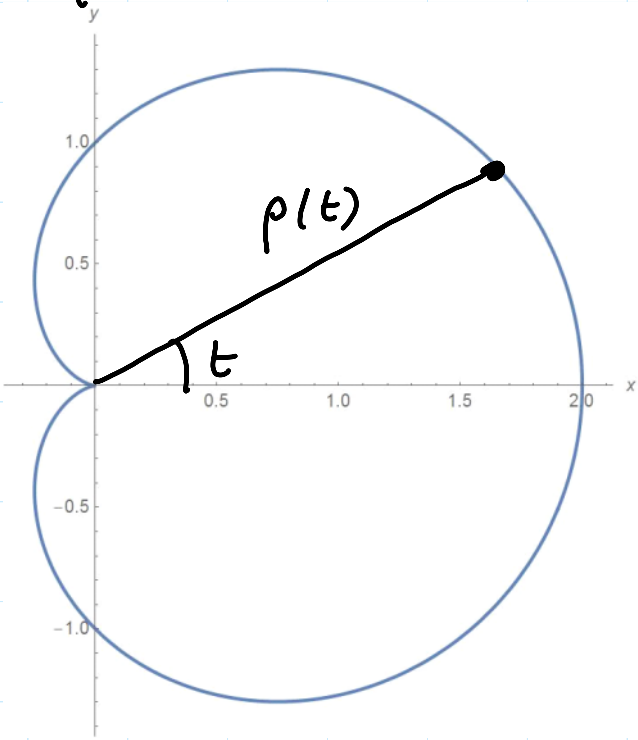


ESEMPIO. Lunghezza di curve in coordinate polari

$f(t) = (\rho(t)\cos t, \ \rho(t)\sin t) \qquad \rho : [a,b] \to [0, +\infty[$

Lungh ($\rho \in \mathcal{C}^1$)

$$\int_a^b \|f'(t)\| \, dt .$$



$$f'(t) = (\rho'(t)\cos t - \rho(t)\sin t, \ \rho'(t)\sin t + \rho(t)\cos t)$$

$$\|f'(t)\|^2 = \rho^2(t) + \rho'^2(t)$$

$$\boxed{\text{Lungh}(f) = \int_a^b \sqrt{\rho^2(t) + \rho'^2(t)} \, dt}$$

Cardioide $\rho(t) = 1 + \cos t, \ t \in [0, 2\pi]$

ES. Lunghezza della cardioide ?

Cicloide

$$\begin{cases} x(t) = rt - r\sin t \\ y(t) = r - r\cos t \end{cases}$$