COMBINATORIA.

X insieme, $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

Una k-sequenza di X è una k-upla ordinata

ORDINATA $\rightarrow$ $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ $\quad x_i \in X$:

si tratta cioè di un elemento di $\underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{k \text{ volte}}$.

La sequenza si dice senza ripetizione se gli x_i sono tutti distinti.

ES. Estrazione di numeri (lotteria) da un'urna di 90 palline numerate da 1 a 90.
Si estraggono ordinatamente 3 palline: l'esito si può rappresentare con una sequenza (x_1, x_2, x_3) di: $\{1, 2, \ldots, 90\} = I_{90}$
Se non vi è reimmissione la 3-sequenza di I_{90} è senza ripetizione.

ES $f: I_k \longrightarrow I_n$ $\qquad (I_k = \{1, \ldots, k\})$
è individuata univocamente dalla sequenza
$(f(1), f(2), \ldots, f(k))$: k-sequenza di I_n.

ES: $k = 2$, $n = 4$

$f: I_2 \to I_4 \quad \longmapsto (3, 1)$

$f(1) = 3$

$f(2) = 1$

f è iniettiva $\iff$ la k-sequenza è senza ripetizione

f è suriettiva $\Leftrightarrow$ nella k-sequenza compaiono tutti gli elementi di I_n.

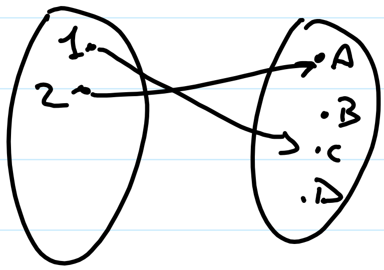
Collezione Una k-collezione di I_n è una famiglia non ordinata $\underbrace{[x_1, x_2, .., x_k]}_{\text{l'ordine non conta.}}$ $x_i \in I_n$.

ES: $[1,1,3] = [3,1,1]$

ES. Un insieme di k elementi è una k-collezione senza ripetizione.

$$\{3,5,7,2\} = [3,5,7,2]$$
$$\neq [3,3,5,7,2]$$

ES. Distribuzione di 52 carte a 4 persone.
Si può vedere come una funzione $I_{52} \to I_4$



Si può descrivere anche con una 52sequenza $(x_1, x_2, .., x_{52})$
dove $x_i \in \{A, B, C, D\}$
x_i = la persona che riceve la carta i.

ES $(A, B, B, A, C, C, ...)$
$\uparrow$ 1ª carta, $\uparrow$ 2ª, $\uparrow$ 3ª, $\uparrow$ 4ª

DEF. Una n-spartizione di I_k è una una n-sequenza $(C_1, .., C_n)$ di sottoinsiemi di I_k tali che
$$\begin{cases} C_i \cap C_j = \emptyset \text{ se } i \neq j \\ C_1 \cup .. \cup C_n = I_k \end{cases}$$

ES. A riceve tutti Cuori (C_A, C_B, C_C, C_D)

ES. A riceve tutti Cuori
B Picche
C Quadri
D riceve Fiori

$$(C_A, C_B, C_C, C_D)$$

C_A = carte Cuori, C_B → Picche, C_C → Q, C_D → Fiori.

ES. 13 carte, 4 persone

$$\underset{1^a}{(A}, \underset{2^a}{A}, \underset{3^a}{B}, \underset{4}{C}, \underset{5}{C}, \underset{6}{B}, \underset{7}{A}, \underset{8}{D}, \underset{9}{A}, \underset{10}{B}, \underset{11}{C}, \underset{12}{D}, \underset{13}{A)}$$

13-sequenza di $\{A, B, C, D\}$

$C_A = \{1, 2, 7, 9, 13\}$
$C_B = \{3, 6, 10\}$
$C_C = \{4, 5, 11\}$
$C_D = \{8, 12\}$

(C_A, C_B, C_C, C_D) è 4-spartizione di I_{13}

PROPOSIZIONE
Vi è una corrispondenza biunivoca tra le k-sequenze di I_n e le n-spartizioni di I_k.

Dim. Una k-sequenza di I_n è univocamente individuata dagli insiemi delle posizioni di $1, 2, .., n$ nella sequenza: in altri termini la corrispondenza

$$\underset{(x_i \in I_n)}{(x_1, .., x_k)} \longmapsto (C_1, .., C_n) \quad \text{con}$$

$$C_i = \{ j \in I_k : x_j = i \} \quad \forall i \in \{1, .., n\}$$

è biunivoca #

OSS: X, Y finiti hanno lo stesso numero di elementi se e solo se X e Y sono in corrispondenza biunivoca.
(Quindi

$$\boxed{\#\ k\text{-sequenze di } I_n = \#\ n\text{-spartizioni di } I_k}$$

OSS. Una k-collezione di I_n $[a_1, a_2, \dots, a_k]$, $a_i \in I_n$ è <u>individuata univocamente</u> dai numeri

$x_1 = \#$ di elementi uguali a 1
$x_2 = \#$ di elementi uguali a 2
$\vdots$
$x_n = \#$ di elementi uguali a n

$x_i \in \mathbb{N}$ $\quad x_1 + \dots + x_n = k$

Una n-upla $(x_1, \dots, x_n)$ con tali proprietà si chiama n-risoluzione di k. Quindi:

$$\boxed{\#\ k\text{-collezioni di } I_n = \#\ n\text{-risoluzioni di } k}$$

PRINCIPIO DI MOLTIPLICAZIONE -

DET. Prodotto condizionato di molteplicità $(m_1, \dots, m_k)$ con $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

X è prodotto cond. di MOLT $(m_1, \dots, m_k)$ se gli elementi di X sono k-sequenze tipo $(x_1, \dots, x_k)$ dove:

$x_1 \in \Omega_1$ con $|\Omega_1| = m_1$ (num. di elementi di Ω_1 è m_1)
$x_2 \in \Omega_2(x_1)$ con $|\Omega_2(x_1)| = m_2$
$x_3 \in \Omega_3(x_1, x_2)$ con $|\Omega_3(x_1, x_2)| = m_3$
$\vdots$
$x_k \in \Omega_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$ con $|\Omega_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})| = m_k$

ES $|X_1| = n_1$, $|X_2| = n_2$, .., $|X_k| = n_k$

$X_1 \times \dots \times X_k$ è un prodotto condizionato di molteplicità $(n_1, .., n_k)$.

Es. Estrazione nell'ordine di 2 carte tra 52:

(x_1, x_2) dove $x_1 \in I_{52} = \Omega_1$

$$x_2 \in \Omega_2(x_1) = I_{52} \setminus \{x_1\}$$

$$|I_{52} \setminus \{x_1\}| = 51.$$

Principio di Moltiplicazione.

Un prodotto condizionato di molteplicità $(n_1, .., n_k)$ ha $n_1 \times n_2 \times .. \times n_k$ elementi.

Dim. Per induzione su k. Se $k=1$ l'insieme ha n_1 elementi. Supponiamo l'assunto vero per $k \geq 1$.
Osserviamo che se X è prodotto condizionato di molteplicità $(n_1, .., n_{k+1})$ allora le prime componenti

$$Y = \{(x_1, .., x_k) : \exists\, x_{k+1} \text{ con } (x_1, .., x_{k+1}) \in X\}$$ è

prodotto condizionato di molteplicità $(n_1, .., n_k)$ ed è quindi $|Y| = n_1 \times .. \times n_k$ (ipotesi induttiva)
Ora X è l'unione disgiunta degli insiemi

$$X = \bigcup_{(x_1, .., x_k) \in Y} \{(x_1, .., x_k, x_{k+1}) : x_{k+1} \in \Omega_{k+1}(x_1, .., x_k)\},$$ ecol è

$$|X| = \sum_{(x_1, .., x_k) \in Y} \underbrace{|\Omega_{k+1}(x_1, .., x_k)|}_{= n_{k+1}} = (n_1 \times .. \times n_k) \times n_{k+1}$$

Versione "divulgativa".

Esperimento aleatorio suddiviso in k tappe.
Tappa 1: n_1 possibilità

fissato l'esito della tappa 1: n_2 possibilità
⋮
Fissato l'esito delle tappe $1, .., k-1$: n_k possibilità,
(*) Dall'esito finale si riesce UNIVOCAMENTE a risalire agli esiti delle varie tappe.
Allora l'esito finale si può realizzare in
$n_1 \times n_2 \times .. \times n_k$ modi possibili.

Dim. La sequenza $(x_1, .., x_k)$ di esiti nelle varie tappe è un prodotto condizionato di molteplicità $(n_1, .., n_k)$. Ad ognuna di queste sequenze $(x_1, .., x_k)$ si associa l'esito finale $\phi(x_1, .., x_k)$: l'ipotesi (*) garantisce che ϕ è biiettiva dal prodotto condizionato negli esiti #

OSSERVAZIONE IMPORTANTE. Non tenere conto di (*) è la causa prima di errori in combinatoria.

ESEMPIO. Si vuole formare un comitato di 2 persone scelte tra due donne D_1, D_2 e un uomo; si vuole che ci sia almeno una donna.
Ovviamente ciò si può fare in 3 modi:
$$\{D_1, D_2\}, \{D_1, U\}, \{D_2, U\}.$$
Si potrebbe pensare di suddividere la formazione del comitato in 2 tappe:
1) Scelta della donna: 2 scelte possibili
2) Scelta del 2° componente del comitato: 2 scelte possibili per ogni donna scelta alla prima tappa.

Una applicazione ERRATA del Principio di Moltiplicazione darebbe 4 comitati possibili!
L'errore è dovuto al fatto che non si è verificata la validità di (*), che in effetti non vale: ad

esempio dall'esito finale $\{D_1, D_2\}$ non è possibile sapere qual è stata la scelta alla tappa 1: D_1 o D_2?

Numero di k-sequenze di I_n.

k-seq. di I_n: $\underbrace{I_n \times \dots \times I_n}_{k \text{ volte}}$: $|I_n^k| = |I_n|^k = n^k$

pr. cartesiano
''
pr. condiz. di molt $(\underbrace{n, n, \dots, n}_{k \text{ volte}})$.

k-sequenze senza ripetizione di I_n:

$(x_1, \ \ , x_k)$

- $x_1 \in I_n \longrightarrow n$
- $x_2 \in I_n \setminus \{x_1\} \longrightarrow n-1$

$\vdots$

- $x_k \in I_n \setminus \{x_1, x_2, , x_{k-1}\} \longrightarrow n-(k-1)$

Si tratta di un prodotto condizionato di molteplicità $(n, n-1, \dots, n-k+1)$: il numero di k-sequenze senza ripetizione di I_n è $n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)$

Caso particolare $k=n$: $(x_1, \dots, x_n)$ $x_i \in I_n$ distinti si chiama permutazione di $(1, 2, \dots, n)$: vi sono quindi $\underbrace{n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1}_{n! \text{ (n fattoriale)}}$ permutazioni possibili

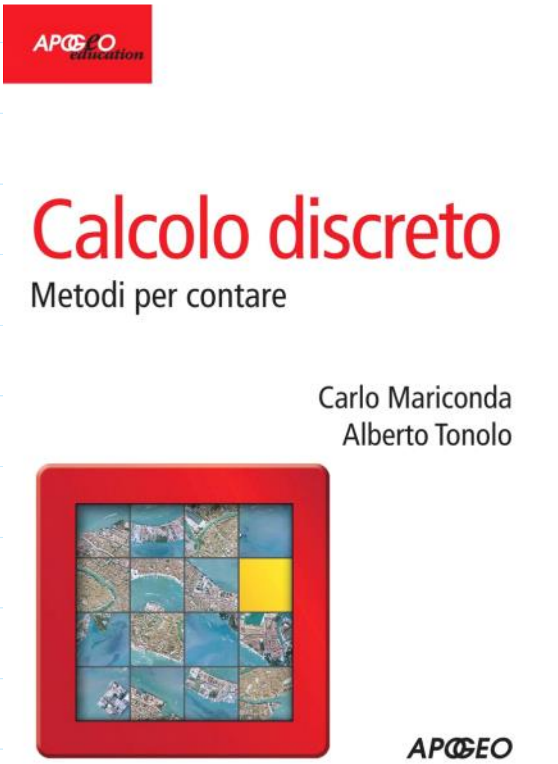
di k-seq. senza ripetizione di I_n è

$$n(n-1) \times \dots \times (n-k+1) = n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1) \times \frac{(n-k) \times \dots \times 2 \times 1}{(n-k) \times \dots \times 2 \times 1}$$

$$= \boxed{\frac{n!}{(n-k)!}}$$

$$= \boxed{\frac{n!}{(n-k)!}}$$

(si pone $0! = 1$)



ESEMPIO. Numero di sottoinsiemi di I_n.

Si ha $|\mathcal{P}(I_n)| = 2^n$

Esempio: gli $2^3=8$ sottoinsiemi di $\{1,2,3\}$ sono
$\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{1,3\}$, $\{1,2,3\}$.

la applicazione

$$\mathcal{P}(I_n) \longrightarrow \text{2-spartizioni di } I_n$$
$$A \longmapsto (A, I_n \setminus A)$$

è biunivoca.
Ora vi sono 2^n 2-spartizioni di I_n,
quindi $|\mathcal{P}(I_n)| = 2^n$.

ESEMPIO. Si vuole formare una parola di 3 lettere distinte con un alfabeto che contiene 26 lettere, si vuole che nella parola compaia una E. In quanti modi si può fare?

2 tappe: 1) Scelta posizione per la E: 3
2) Inseriamo le altre 2 lettere nelle posizioni rimanenti

$$\underline{F} \quad E \quad \underline{M} \quad \longrightarrow (F, M)$$

$\underline{F} \quad E \quad \underline{M} \longrightarrow (F, M)$

le possibilità sono tante quante le 2-sequenze senza ripetizione di I_{23} : $\dfrac{23!}{(23-2)!} = 23 \times 22$

Per il Principio di Molt.: $3 \times 23 \times 22$ parole possibili.

ESEMPIO. Numero di modi per estrarre, in ordine, 5 carte da un MAZZO di 52 carte:
5-seq. senza ripetizione di I_{52}: $\dfrac{52!}{(52-5)!}$

INSIEMI di k elementi tra n.

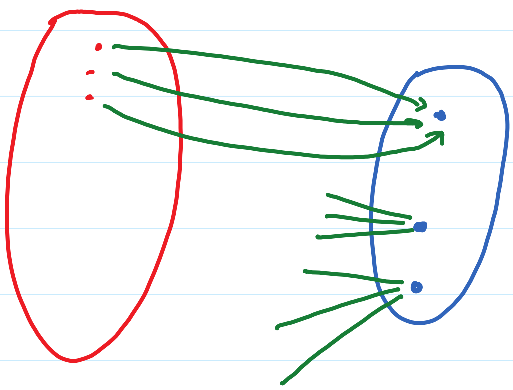
Contare il numero di tali insiemi.

ES. # di insiemi di 5 carte tra 52

$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ $\quad x_i$ distinti
$\quad x_i \in \{1, .., 52\}$

Principio di divisione.

Sia $f : X \longrightarrow Y \quad X, Y$ finiti.



Supponiamo che ogni elemento $y \in Y$ provenga da esattamente $m \geq 1$ di elementi di X:
$|f^{-1}(y)| = m \quad \forall y \in Y$. Allora

$|f^{-1}(y)| = m \quad \forall y \in Y$. Allora
$$|Y| = \frac{|X|}{m}.$$

Dim. $X = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y)$ e tale unione è disgiunta.

Pertanto $|X| = \sum_{y \in Y} \underbrace{|f^{-1}(y)|}_{=m} = \sum_{y \in Y} m = m|Y|$ #

Applicazione. Contare il # di insiemi di k elementi di I_n.
Ad ogni k-sequenza senza ripetizione $(a_1, .., a_k)$ di I_n associamo la collezione $f(a_1, .., a_k) = \{a_1, .., a_k\}$.
Una tale collezione proviene da $k!$ sequenze distinte.

$$f: \underset{\substack{\parallel \\ k\text{-seq. senza ripetizione} \\ \text{di } I_n}}{X} \longrightarrow \underset{\substack{\parallel \\ \text{sott. di } k\text{ elementi} \\ \text{tra } n}}{Y}$$
$$(x_1, .., x_k) \longmapsto \{x_1, .., x_k\}$$

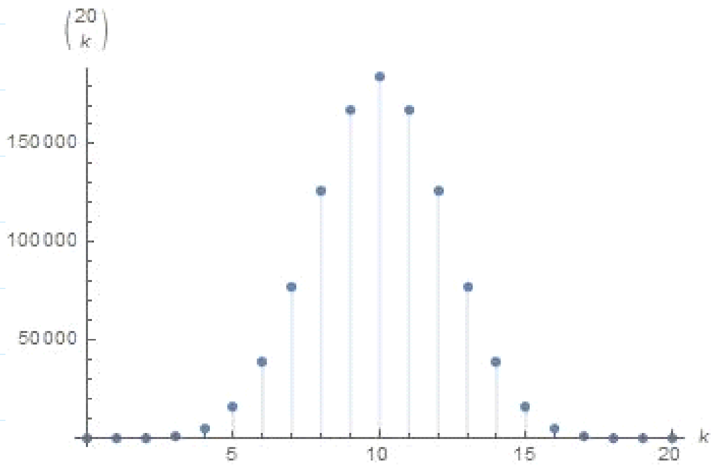
$X = k$-seq. senza rip di I_n: $|X| = \frac{n!}{(n-k)!}$.
Applicando il Principio di Divisione otteniamo

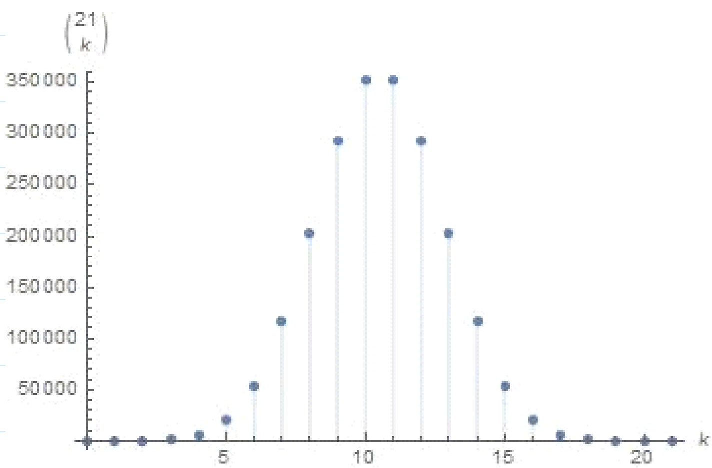
$$\Rightarrow |Y| = \frac{|X|}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \#$$

Prop. Il numero di sottoinsiemi di $\boxed{k \in \{0, .., n\}}$ elementi di I_n è uguale a $\boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}}$.
(si pone $0! = 1$)
tale numero si chiama il binomiale "n su k" e si indica con $\binom{n}{k}$

20

· n m k ≤ n ...varia con $\binom{\ }{k}$





Es. $\binom{n}{1}$ = # di sott. di 1 elemento tra n
$= n$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

sott. di 2 elti tra n: $\underbrace{(\underset{n}{x_1}, \underset{(n-1)}{x_2})}_{\{x_1, x_2\}}$ ($n(n-1)$) $\quad (x_2, x_1)$ ($n(n-1)$)

Prop: $0 \le k \le n$: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Infatti scegliere un sott. A di k elementi equivale a scegliere $I_n \setminus A$, cioè un sottoinsieme di $n-k$ elementi.

un sottoinsieme di $n-k$ elementi.

FORMULA di RICORRENZA DI STIEFEL

$1 \le k \le n-1$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{\underbrace{k-1}_{k-1 \ge 0}} + \binom{n-1}{k}$$

$k \le n-1$

Dim. 2 classi di insiemi con k elementi:

1) Quelli che contengono l'elemento n

$\{\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}}_{\in \{1, \dots, n-1\}}, n\} \longleftrightarrow \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ tanti quanti i sottoins. di $k-1$ el.ti di I_{n-1}: $\binom{n-1}{k-1}$

2) Quelli che non contengono n

= sottoinsiemi di k elementi di $\{1, 2, \dots, n-1\}$

$\binom{n-1}{k}$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad \#$$

TRIANGOLO DI TARTAGLIA/PASCAL

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
$n-1$: 4	1	4	6	4	1	
n: 5	1	5	10	10	5	1

Per

"mandare giù" il triangolo di Tartaglia/Pascal

ESEMPIO. Numero di mani di 5 carte tra 52: Numero di sottoinsiemi di 5 elementi tra 52: $\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\,(52-5)!}$

ES: # di sottoinsiemi di un insieme che ha n elementi è 2^n

$2^n = $ # sott. con 0 elementi + # sott. con 1 el.to + ... + # sott. con n elementi

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n}$$

Applicazione. BINOMIO di NEWTON.

$a, b \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^*$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

$$(a+b)^n = \sum^{n} \binom{n}{\cdot} a^{n-k} b^k = \sum^{n} \binom{n}{\cdot} a^k b^{n-k}$$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

$n=2$: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3.$

Dim. $(a+b)^n = \underset{1}{(a+b)}\,\underset{2}{(a+b)} \cdots \underset{n}{(a+b)}$

è una SOMMA di termini del tipo $a^k b^{n-k}$.
Un tale termine si ottiene "scegliendo" a in k parentesi (e quindi b nelle rimanenti $n-k$). Scegliere k parentesi $(a+b)$ significa scegliere k numeri tra $\{1, 2, .., n\}$:
cioè un sottoinsieme di k elementi di I_n: ciò si può fare in $\binom{n}{k}$ modi:
ci sono quindi $\binom{n}{k}$ addendi del tipo $a^k b^{n-k}$

$\Rightarrow (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ #

ANAGRAMMI (permutazioni con ripetizione)

ESEMPIO: Quanti sono gli anagrammi di MELE?

È facile elencarli tutti:

MELE LEME EEML EELM ELEM EMEL
ELME EMLE LMEE MLEE MEEL LEEM

Per calcolarne il numero senza elencarli si poteva procedere così:

1) Scelta delle 2 posizioni per E tra 4: $\binom{4}{2}$ modi
2) Scelta della posizione di L tra 2: 2 modi
3) Scellta della posizione di M: 1 modo.

3) Scelta della posizione di M: 1 modo.

Si può senz'altro applicare il Principio di Moltiplicazione: da ogni anagramma di MELE si può risalire univocamente alle scelte fatte nelle tappe 1) 2) e 3).

Vi sono pertanto $\binom{4}{2} \times 2 \times 1 = \frac{4!}{2!} = 12$ anagrammi di MELE.

Più in generale si ha

PROPOSIZIONE.

Il numero di k-sequenze di I_n che ha k_1 "1", k_2 "2", ..., k_n "n" è

$$\frac{k!}{k_1! \cdots k_n!} \qquad (k_1, \ldots, k_n \geq 0)$$

(Una tale sequenza è una "permutazione" di

$$(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k_1}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{k_2}, \ldots, \underbrace{n, \ldots, n}_{k_n})$$

Dim. n tappe:

- Scelta delle k_1 posizioni di 1: $\binom{k}{k_1}$
- Scelta delle k_2 posizioni di 2 tra le $k - k_1$ disponibili: $\binom{k-k_1}{k_2}$

$\vdots$

- Scelta delle k_{n-1} posizioni di $(n-1)$ tra le $k - (k_1 + \cdots + k_{n-2})$: $\binom{k-(k_1+\cdots+k_{n-2})}{k_{n-1}}$
- Scelta delle k_n posizioni di n tra le $k - (k_1 + \cdots + k_{n-1})$: $\binom{k-(k_1+\cdots+k_{n-1})}{k_n} = 1 \qquad (k_1 + \cdots + k_n = k)$

Per il Principio di Moltiplicazione vi sono in tutto

$$\binom{k}{k_1}\times\binom{k-k_1}{k_2}\times\dots\times\binom{k-(k_1+\dots+k_{n-2})}{k_{n-1}}\times\binom{k-(k_1+\dots+k_{n-1})}{k_n}$$

scelte possibili

$$=\frac{k!}{k_1!\cancel{(k-k_1)!}}\;\frac{\cancel{(k-k_1)!}}{k_2!\cancel{(k-k_1-k_2)!}}\cdots\frac{\cancel{(k-(k_1+\dots+k_{n-2}))!}}{k_{n-1}!\cancel{(k-(k_1+\dots+k_{n-1}))!}}\;\frac{\cancel{(k-(k_1+\dots+k_{n-1}))!}}{k_n!\;0!}$$

$$=\frac{k!}{k_1!\dots k_n!}\qquad\#$$

NUMERO di k-collezioni di I_n.

In quanti modi si possono fare dei sacchetti di 12 cioccolatini utilizzando cioccolatini di 3 tipi diversi (ammettendo anche 12 cioc. dello stesso tipo...)?
Se A, B, C sono i tipi di cioccolatini, la distribuzione è individuata da una 12-collezione di $\{A, B, C\}$. Quante sono?

Prop. Il numero di k-collezioni di I_n o, equivalentemente, il numero di n-risoluzioni di k, è uguale a

$$\frac{(n-1)+k)!}{(n-1)!\;k!}=\binom{(n-1)+k}{k}=\binom{(n-1)+k}{n-1}$$

Dim. Ogni n-risoluzione $(x_1,\dots,x_n)$ di k è individuata da una sequenza di $\{0,1\}$ formata nell'ordine da blocchi di x_1 "0", un "1", x_2 "0", un "1", .. , x_k "0":

$$(x_1,\dots,x_n)\longmapsto(\underbrace{0,\dots,0}_{x_1},1,\underbrace{0,\dots,0}_{x_2},\dots\dots,1,\underbrace{0,\dots,0}_{x_n})$$

Esempio

$$(2,0,5,2) \longmapsto (0,0,1,\underset{\uparrow}{1},\underbrace{0,0,0,0,0}_{5},1,\underbrace{0,0}_{2})$$

ovvero vi è una corrispondenza biunivoca tra le n-risoluzioni di k e le $((n-1)+k)$-sequenze di $\{0,1\}$ che hanno esattamente k "0" e "$n-1$" 1: queste sono in tutto $\dfrac{((n-1)+k)!}{(n-1)!\,k!}$ #

OSS. Non è sorprendente che il risultato dipenda da $(n-1)$: una volta conosciuto il numero di "1", di "2", .., di "$n-1$", il numero di "n" è univocamente individuato.

ES. Il numero di modi per formare dei sacchetti di 12 cioccolatini di 3 tipi diversi è il numero di 12-collezioni di $\{1,2,3\}$ ovvero

$$\binom{12+(3-1)}{(3-1)} = \binom{14}{2} = \frac{14!}{12!\,2!} = \frac{14\times 13}{2} = 7\times 13.$$

Domanda. Quanti modi per formare sacchetti come sopra dove vi sia almeno un cioccolatino di ogni tipo?

ES In un mazzo da poker una *doppia coppia* è una mano di 5 carte costituita da due coppie di tipi *diversi* (es: 2 Jack, 2 Assi) e da una carta di tipo diverso dalle precedenti. Quante doppie coppie è possibile realizzare?

Si tratta degli insiemi del tipo $\{\{\text{Coppia}\},\{\text{Coppia}\},\text{Carta}\}$.
Contiamo intanto l'insieme X delle sequenze
$(\{\text{Coppia }1\},\{\text{Coppia }2\},\text{Carta})$, procedendo per tappe:

1) Valore coppia 1 (asso, 2, 3, 4, ..) : 13 scelte
2) Valore coppia 2 : 12 scelte
3) Semi coppia 1 (due tra {Picche, Quadri, Cuori, Fiori}): $\binom{4}{2}$
4) Semi coppia 2: $\binom{4}{2}$
5) La quinta carta: $52-8=44$ scelte.

Si può applicare il Principio di Moltiplicazione: da ogni sequenza di X possiamo risalire in modo unico alle scelte svolte nei passi 1)–5). Pertanto $|X| = 13\times 12\times \binom{4}{2}^2 \times 44$

Sia ora Y l'insieme delle mani $\{\{\text{Coppia } 1\}, \{\text{Coppia } 2\}, \text{Carta}\}$.
L'applicazione $\phi : X \longrightarrow Y$, $\phi(\{\text{Coppia } 1\}, \{\text{Coppia } 2\}, \text{Carta}) =$
$= \{\{\text{Coppia } 1\}, \{\text{Coppia } 2\}, \text{Carta}\}$ è tale che ogni elemento di Y ha esattamente 2 antiimmagini: per il principio di divisione si ha $|Y| = \frac{|X|}{2}$. Il numero di mani di doppie coppie è quindi pari a $13 \times 12 \times \binom{4}{2}^2 \times 44/2$.

PROBABILITÀ SU UN INSIEME FINITO.

Ω (finito) SPAZIO CAMPIONARIO

$\Omega = \{x_1, x_2, .., x_n\}$ $\quad x_i$: eventi elementari

$A \subseteq \Omega$: eventi

Una probabilità su Ω (FINITO) è una funzione $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$

$\uparrow$ eventi

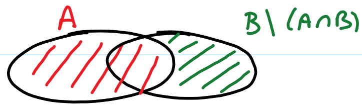
$A \longmapsto P(A) =$ probabilità di A :

1) $P(\emptyset) = 0$ $\quad P(\Omega) =$

2) A, B disgiunti $(A \cap B = \emptyset) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Conseguenze:

- $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$: $B = A \cup (B \setminus A)$
$\Rightarrow P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq P(A)$.
- $P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \leftarrow A \subseteq B$
- A, B



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A \cap B)$
$\quad = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Assegnare una probabilità su un insieme finito.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, .., \omega_n\}$

$P(\{\omega_1\}) = P(\omega_1) = p_1 \in [0,1]$ $\qquad p_1 + \dots + p_n = P(\{\omega_1\} \cup \dots \cup \{\omega_n\})$
$\qquad = P(\Omega) = 1$

$\vdots$

$P(\{\omega_1\}) = P(\omega_1) = p_1 \in [0,1]$ $\qquad p_1+\dots+p_n = P(\{\omega_1\}\cup\dots\cup\{\omega_n\})$

$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = P(\Omega) = 1$

$P(\{\omega_n\}) = P(\omega_n) = p_n \in [0,1]$

Se P è prob. su $\Omega = \{\omega_1,\dots,\omega_n\}$

$\Downarrow$

posto $p_i := P(\omega_i)$ si ha $\begin{array}{l} p_i \geq 0 \\ p_1+\dots+p_n = 1 \end{array}$

Vale anche il viceversa: per assegnare una prob. su Ω è sufficiente assegnare una prob. p_ω ad ogni $\omega \in \Omega$, in modo tale che $p_\omega \geq 0$, $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$.

ES. $\Omega = \{T, C\}$ $\qquad P(T) = 2/3 \qquad P(C) = 1/3$

T = testa, C = croce

ES. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$P(1) = \frac{1}{12} \qquad P(4) = \frac{1}{6}$

$P(2) = \frac{1}{12} \qquad P(5) = ?$

$P(3) = \frac{1}{12} \qquad P(6) = ?$

$P(\text{Esce un numero pari}) = P(2) + P(4) + P(6)$

DEF. Ω FINITO. La probabilità uniforme su Ω è la funzione $P_u^\Omega : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ tale che $P_u^\Omega(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} \quad \forall \omega \in \Omega$.

Di conseguenza $\forall A \subseteq \Omega$

$$P_u^\Omega(A) = \sum_{\omega_i \in A} P_u^\Omega(\omega_i) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

$$\Rightarrow \boxed{P_u^\Omega(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}}$$

ESERCIZIO. 6 libri diversi; consideriamo le possibili disposizioni in riga dei 6 libri.

1) Probabilità di avere una fissata disposizione (es: ordine alfabetico di autore/titolo/anno)

1) Scelta dello spazio CAMPIONARIO.

Ω = 6-sequenze senza ripetizione di I_6

$|\Omega| = 6!$

2) Supponiamo che su Ω vi sia la probabilità uniforme: $P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{6!}$

2) 3 ROMANZI, 2 matematica, 1 di chimica.

Probabilità che i 3 romanzi siano uno accanto all'altro.

ROMANZI: $\{1, 2, 3\}$

$A = \{$ 6-sequenze senza ripetizione con "1,2,3 vicini":

$\underbrace{\square\square\square}_{1,2,3} \star\star\star$, $\star\square\square\square\star\star$, ... $\}$

P uniforme $\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{6!}$

Calcoliamo $|A|$:

- Seq. del tipo $(\square, \square, \square, \star, \star, \star)$
  $\square \in \{1, 2, 3\}$
  $\star \in \{4, 5, 6\}$

  2 tappe: a) i libri $\{1, 2, 3\}$ $3!$
  b) i libri $\{4, 5, 6\}$ $3!$ $\Big\}(3!)^2$

- $(\star, \square, \square, \square, \star, \star)$, $(\star, \star, \square, \square, \square, \star)$, $(\star, \star, \star, \square, \square, \square)$

In tutto $|A| = 4 \times (3!)^2 \Rightarrow P(A) = \frac{4 \times (3!)^2}{6!}$

OSS: $P(\underset{\Omega \setminus A}{\underset{\parallel}{A^c}}) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$.

ESEMPIO. (Paradosso dei Compleanni)

n persone in un gruppo (scelte a caso)

Qual è la probabilità che almeno due di esse compiano gli anni lo stesso giorno?

Le date: numeri tra 1 e 365.

Un modo per descrivere le attribuzioni delle date è quello di formare una collezione delle varie date delle persone.

Es: 2 persone: $[3,3]$: entrambi nati il giorno 3

Ω = n-collezioni di I_{365}

(Es. $[1,4,4,365]$: uno nato l'1, due nati il giorno 4, uno nato il giorno 365.)

A: almeno due persone nate lo stesso giorno

OSS: $P(A) + P(A^c) = P(\Omega) = 1$. $\Omega = A \cup A^c$

$1 = P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$

$\Rightarrow \boxed{P(A^c) = 1 - P(A)}$

A^c = tutti nati in giorni diversi

$\rightarrow$ sottoinsiemi di n elementi di I_{365}

$$P(A) = 1 - P(A^c) \; ; \quad P(A^c) = \frac{|A^c|}{|\Omega|}$$

È ragionevole attribuire agli elementi di Ω la stessa probabilità ?

Trattiamo il caso di $n=3$

"È ragionevole attribuire la stessa probabilità a:
"una nata l'1, una il 2 una il 3": $[1,2,3]$
"tutte nate il giorno 1" $\rightarrow$ $[1,1,1]$?

Questi due eventi non hanno la stessa probab.
se le persone sono scelte a caso.

Questi due eventi non hanno le stesse probab.

se le persone sono scelte a caso:

	[1, 1, 1]			[1, 2, 3]			
	Persone A	B	C	A	B	C	
1 caso Giorno	1	1	1	1	2	3	3 casi
				1	3	2	
				3	1	2	

Non è ragionevole!

Scegliamo lo spazio campionario delle n-sequenze di I_{365} attribuendo una data ad ogni persona, nell'ordine:

$$(a_1, \dots, a_n)$$

a_1: data della persona 1

a_n: data della persona n.

Ω = n-seq. di I_{365} ← Su Ω attribuiamo la prob. uniforme. è ragionevole!

A^c = n-seq. di I_{365} senza ripetizione

$$P(A^c) = \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \frac{365!/(365-n)!}{365^n}$$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{365!/(365-n)!}{365^n}$$

OSS: $n = 23 \longrightarrow P(A) \sim 50\%$