

Esercizi di ripasso per il I compitino. FAMP 2015/16

1. Risolvere l'equazione $(1+x^3)y' - x^2y = 0$, $y(0) = 3$. Quanto vale $y(1)$?
2. Dopo averne abbozzato un disegno calcolare la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da $\rho(t) = 5 \cos t$ con $t \in [0, 3\pi/4]$, cioè la curva

$$\alpha(t) = 5 \cos t (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 3\pi/4]$$

3. Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$. Calcolare $\partial_x f(0,0)$ e $\partial_y f(0,0)$ sapendo che

$$\partial_{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})} f(0,0) = 5/\sqrt{2} \quad \partial_{(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})} f(0,0) = 3/\sqrt{5}$$

4. Sia f differenziabile in $(1,2)$ con $f(1,2) = 0$, $f_x(1,2) = 3$ e $f_y(1,2) = -2$.
 - (a) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1,2)$;
 - (b) Approssimare il valore di $f(1.1, 1.9)$;
 - (c) Calcolare la derivata della funzione $f(1+t^2, 2e^t)$ in $t = 0$.
5. Si considerino l'insieme $C = \{(x,y) : -3 \leq y - 2x \leq 3, -1 \leq y \leq 1\}$ e la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + 3$.
 - (a) Dire se C è chiuso e/o limitato;
 - (b) Studiare i punti critici di f su $\mathbb{R}^2$ e determinarne la natura;
 - (c) Trovare, se esistono (dirlo!), i minimi e massimi assoluti di f su C .

6. Calcolare

$$\int_T x \, dx \, dy \, dz \quad T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x - z\}.$$

7. Sia E il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ definito da $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, x + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
 - (a) Spiegare brevemente di che insieme si tratta o abbozzarne un disegno;
 - (b) Calcolare

$$\int_E z^2 \, dx \, dy \, dz.$$

8. Considerare la seguente somma di integrali ridotti come l'integrale di una funzione su un opportuno dominio e calcolarlo:

$$\int_0^{4/5} \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{2x} \frac{x \sin y}{y} \, dy \, dx + \int_{4/5}^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} \frac{x \sin y}{y} \, dy \, dx$$

9. Si consideri il campo definito su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ da $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right)$.
 - (a) Provare che il campo $\vec{F}$ è irrotazionale;
 - (b) Senza provare a calcolarlo, dire se esiste un potenziale U di $\vec{F}$ sul semipiano $y > 0$;
 - (c) Senza provare a calcolarlo, dire se esiste un potenziale U di $\vec{F}$ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: perché?
 - (d) Calcolare un potenziale di $\vec{F}$ sul più grande dei due domini precedenti sul quale esso esiste.
 - (e) Sia α il cammino $\alpha(t) = (\sin t + 2, \cos^2 t)$, $t \in [0, \pi/2]$. Calcolare l'integrale $\int_\alpha F(x) \cdot d\alpha$.

10. Calcolare l'area della parte del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ contenuto nella palla $x^2 + y^2 + z^2 - 2y \leq 0$.

11. Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_{\Sigma} z \, d\sigma$$

dove Σ è la parte di superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con $z \in [1, 2]$.

12. Sia $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

(a) Disegnare G e verificare che la frontiera di G si compone di due porzioni, superiore A , base B .

(b) Trovare il flusso uscente da A del campo $F(x, y, z) = (0, 0, z)$. (*Suggerimento*: calcolare il flusso uscente da G e da B , usare poi il t. della divergenza)

13. Risolvere il problema di Cauchy

$$y' = 2ty + e^{t^2}, \quad y(1) = 2.$$

14. Risolvere il problema di Cauchy

$$y' = \frac{ty}{2 \log y}, \quad y(0) = e.$$

15. Siano $\vec{F}(x, y) = (y \cos(xy), x \cos(xy) + 2)$, e γ un cammino che congiunge 0 a $\left(\pi, \frac{1}{2}\right)$. Calcolare

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma.$$

16. Calcolare il volume di

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 3y^2 + z^2 \leq 1, 2x^2 + 3y^2 \leq \frac{1}{2}\}$$

17. Calcolare l'integrale

$$\int_D xy \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 3x, 1 \leq xy \leq 3\}.$$

Sugg: porre $u = y/x, v = xy$. [R: $2 \log 3$]

18. Sia $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{e^x}{\sqrt{1+x^2}}, 2x\right)$, e D l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, \sinh x < y < \sinh 1\}.$$

Determinare l'integrale di $\vec{F}$ sul bordo di D , orientato in senso antiorario.