ESERCIZIO 1. $y' - \frac{x^2}{1+x^3} y = 0 \iff \left(y\, e^{-\int \frac{x^2}{1+x^3}}\right)' = 0$

Ora $\int \frac{x^2}{1+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\lg|x^3+1| + c$ da cui $\left(\frac{y(x)}{|x^3+1|^{1/3}}\right)' = 0$ ovvero

$y(x) = c\,|x^3+1|^{1/3}$. E' $y(0) = 3 \iff 3 = c\,|0|^{1/3} = c$ sicché $y(x) = 3|x^3+1|^{1/3}$

e $\boxed{y(1) = 3 \cdot 2^{1/3}}$.

Esercizio 2 $\rho(t) = 5\cos t \quad t \in [0, 3\pi/4]$

$r(t) = (\rho(t)\cos t, \rho(t)\sin t)$

= Lunghezza di $r$: $\int_0^{3\pi/4} \sqrt{\rho^2(t) + \dot\rho^2(t)}\,dt$

$\dot\rho(t) = 5\sin t \Rightarrow \rho^2 + \dot\rho^2 = 25(\cos^2 t + \sin^2 t) = 25$

$\ell = \int_0^{3\pi/4} 5\,dt = 5 \times 3\pi/4.$

Parametrizzare $r$ con la lunghezza d'arco:

$s = \int_0^t \sqrt{\rho^2 + \dot\rho^2}\,d\tau = \int_0^t 5\,d\tau = 5t \qquad s = 5t \iff t = s/5$

$r(t) = (5\cos t\cos t, 5\cos t \sin t)$

$t = t(s) = s/5 \qquad \boxed{\tilde r(s) = \left(5\cos^2 \tfrac{s}{5}, 5\cos\tfrac{s}{5}\sin\tfrac{s}{5}\right)}$

Esercizio 3 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe $C^1$. Supponiamo

$D_{(1,1)} f(0,0) = 5, \quad D_{(-2,1)} f(0,0) = 3.$

Calcolare $\nabla f(0,0)$.

$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad D_{(1,1)} f(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
$= a+b$

$D_{(-2,1)} f(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = -2a+b$

$\begin{cases} a+b=5 \\ -2a+b=3 \end{cases} \qquad b = 5-a \qquad\qquad b = 5 - \tfrac{2}{3} = \tfrac{13}{3}$

$-2a+5-a = 3 \Rightarrow 3a = 2 \Rightarrow a = \tfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 13/3 \end{pmatrix}.$

ES 4 a) $z = f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2)$
$= 3(x-1) - 2(y-2)$

b) $f(1.1, 1.9) \sim 3(1.1-1) - 2(1.9-2) = 0.3 + 0.2 = 0.5$

c) $\frac{d}{dt} f(1+t^2, 2e^t) = f_x(1+t^2, 2e^t)\cdot 2t + f_y(1+t^2, 2e^t)\cdot 2e^t$

in $t=0$ è $\frac{d}{dt} f(1+t^2, 2e^t)_{t=0} = f_x(1,2)\cdot 0 + f_y(1,2)\cdot 2$
$= 2 f_y(1,2) = -4.$

ES 5 $C$ è chiuso perché intersezione degli insiemi chiusi $\{(x,y): -3 \le y-2x\} \cap \{(x,y): y-2x \le 3\} \cap \{(x,y): -1 \le y \le 1\}$.

$C$ è limitato: $(x,y) \in C \Rightarrow |y| \le 1$; da $-3 \le y-2x \le 3$

si deduce $\begin{cases} 2x \le y+3 \le 1+4 \\ x \le 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x \ge y-3 \ge -1-3 \ge -4 \\ x \ge -2 \end{cases}$

da cui $|x| \le 2$

b) $f(x,y) = x^2+y^2-xy+3$

$\nabla f(x,y) = (2x-y, 2y-x) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ x=2y \end{cases} \Leftrightarrow y=x=0$

$\mathrm{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ : $2>0$, $\det \mathrm{Hess} f(0,0) = 5>0$

$\Rightarrow (0,0)$ è minimo locale stretto.

(c) $f$ ha MAX e MIN assoluti su $C$. Se $p$ è MIN/MAX assoluto interno $\Rightarrow p$ è MIN/MAX locale $\Rightarrow p=(0,0)$; e $\boxed{f(0,0)=0}$

Studiamo $f$ sulla frontiera $\partial C$ di $C$ $(=C \setminus \mathring{C})$:

È $\partial C = A \cup B \cup C \cup D$ ove

$A = \{y-2x=-3$ con $-1 \le y \le 1\}$ $\quad C = \{y=-1, -3 \le y-2x \le 3\}$

$B = \{y-2x=3$ con $-1 \le y \le 1\}$ $\quad D = \{y=1, -3 \le y-2x \le 3\}$.

• su $A$ è $x = \frac{y+3}{2}$; $f(x,y) = f\left(\frac{y+3}{2}, y\right) = \left(\frac{y+3}{2}\right)^2 + y^2 - \left(\frac{y+3}{2}\right)y + 3$
$= \frac{3y^2}{4} + \frac{21}{4}$

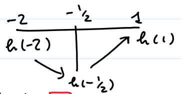
che ha su $[-1,1]$ minimo in $y=0$ (vale $\boxed{\frac{21}{4}}$) e massimo in $y=1$ ($\frac{3+21}{4} = \boxed{6}$)

• su $B$ è $x = \frac{y-3}{2}$ e $f(x,y) = f\left(\frac{y-3}{2}, y\right) = \left(\frac{y-3}{2}\right)^2 + y^2 - \left(\frac{y-3}{2}\right)y + 3$
$= \frac{3y^2}{4} + \frac{21}{4}$ : idem come sopra.

• su $C$ è $y=-1$ con $-3 \le -1-2x \le 3 \Leftrightarrow x \in [-2, 1]$

e $f(x,-1) = x^2+1+x+3 = x^2+x+4$; la funzione $x \longmapsto x^2+x+4 =: h(x)$

è $h'(x) = 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

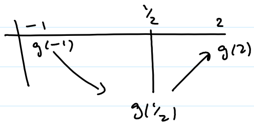



È $h(-2) = 4-2+4 = \boxed{6}$; $h(1) = 1+1+4 = \boxed{6}$

$h\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 4 = -\frac{1}{4} + 4 = \boxed{\frac{15}{4}}$

• su $D$ è $y=1$ con $-3 \le 1-2x \le 3 \Leftrightarrow x \le 2$, $x \ge -1$ e

$f(x,1) = x^2+1-x+3 = x^2-x+4 =: g(x)$; $g'(x) = 2x-1 = 0$ per $x = \frac{1}{2}$




$g(-1) = 1+1+4 = \boxed{6}$

$g(2) = \boxed{6}$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 4 = -\frac{1}{4} + 4 = \boxed{\frac{15}{4}}$

Pertanto $\max f = \max\left\{6, \frac{21}{4}, \dots\right\} = \boxed{6}$

$\min f = \min\left\{\frac{15}{4}, 6, 0, \dots\right\} = \boxed{\frac{15}{4}}$

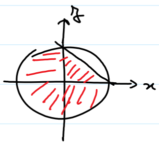
ES 6 $\quad T$ è semplice rispetto a $(x,z)$:

$T = \{(x,y,z) : x^2+z^2 \le 1,\ x+z \le 1,\ 0 \le y \le 1-x-z\}$

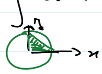
↑ proviene da $0 \le y \le 1-x-z\}$

$\Rightarrow \int_T x \, dx\,dy\,dz = \int_{\substack{x^2+z^2 \le 1 \\ x+z \le 1}} x \int_0^{1-x-z} dy \, dx\,dz$

$= \int_{\substack{x^2+z^2 \le 1 \\ x+z \le 1}} x(1-x-z) \, dx\,dz$




$= \int x(1-x-z)\,dx\,dz + \int x(1-x-z)\,dx\,dz$




$= \int \rho^2 \cos t (1-\rho\cos t - \rho \sin t) \, d\rho\, dt + \int_0^1 \int^{1-x} x(1-x-z)\,dz\,dx \dots$

$$= \int_{\substack{0<\rho<1 \\ t\in[\frac{\pi}{2},2\pi]}} \rho^2 \cos t\,(1-\rho\cos t-\rho\sin t)\,d\rho\,dt + \int_0^1 \int_0^{1-x} x(1-x-y)\,dy\;dx$$

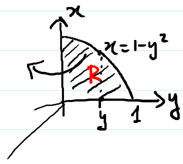
$= \dots$ (finire)

**Esercizio 7** $E = \{(x,y,z) : x \geq 0,\ x+y^2+z^2 \leq 1\}$.

Calcolare $\int z^2\,dx\,dy\,dz$.

$E$ è ottenuto ruotando un insieme $R \subseteq \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_x$ attorno all'asse $x$

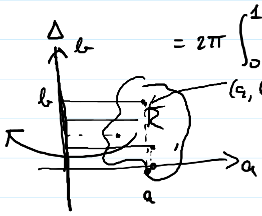
$R = \{(y,x) : x+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$




Calcoliamo per esercizio il volume di $E$: * Non è quello che avevo chiesto! → Esercizio EXTRA.

$$2\pi \int_R y\,dx\,dy = 2\pi \int_0^1 y \int_0^{1-y^2} dx\;dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 y(1-y^2)\,dy = 2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right).$$




$$2\pi \int_R a\,da\,db$$

$$\int_{\{0\leq x\leq 1-y^2-z^2\}} z^2\,dx\,dy\,dz = \int_{y^2+z^2\leq 1} z^2 \int_0^{1-y^2-z^2} dx\;dy\,dz$$

$$= \int_{y^2+z^2\leq 1} z^2(1-y^2-z^2)\,dy\,dz$$

$y=\rho\sin t,\quad z=\rho\cos t \qquad t\in[0,2\pi] \qquad \rho\in[0,1]$

$$= \int_{\substack{0\leq t\leq 2\pi \\ 0\leq\rho\leq 1}} \rho^2\cos^2 t\,(1-\rho^2)\,\rho\,d\rho\,dt$$

$$= \int \rho^3(1-\rho^2)\cos^2 t\;d\rho\,dt = \left(\int_0^1 \rho^3(1-\rho^2)\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt\right)$$

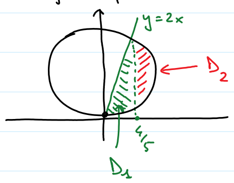
$$= \dots \qquad \dots \frac{\pi}{12}$$

**ES 8.**

$$\int_0^{4/5} \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{2x} \frac{x\sin y}{y}\,dy\,dx = \int_{D_1} \frac{x\sin y}{y}\,dx\,dy$$

dove $D_1 = \{x\in[0,\frac{4}{5}],\ 1-\sqrt{1-x^2}\leq y\leq 2x\}$.

L'insieme $y = 1-\sqrt{1-x^2}$ è $\subseteq \{(y-1)^2 = 1-x^2\} \iff \{x^2+(y-1)^2 = 1\}$: cerchio di centro $(0,1)$ raggio $1$




Si noti che l'intersezione di $x^2+(y-1)^2 = 1$ con $y = 2x$ è

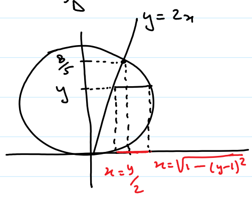
in $x^2+(2x-1)^2 = 1 \iff 5x^2-4x = 0$
$\iff x = 0$ o $x = 4/5$.

Si ha analogamente $\displaystyle\int_{4/5}^{1}\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} \frac{x\sin y}{y}\,dy\,dx$

$$= \int_{D_2} \frac{x\sin y}{y}\,dx\,dy \qquad \text{dove}$$

$D_2 = \{(x,y):\ \frac{4}{5} \le x \le 1,\quad 1-\sqrt{1-x^2} \le y \le 1+\sqrt{1-x^2}\}$

Posto $D = D_1 \cup D_2$ è $\displaystyle\int_{D_1} \cdots + \int_{D_2} \cdots = \int_D \cdots$; integriamo per linee parallele all'asse $x$:




$$= \int_0^{8/5}\int_{y/2}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} \frac{x\sin y}{y}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{8/5} \frac{\sin y}{y}\,\frac{1}{2}\Big[x^2\Big]_{y/2}^{\sqrt{1-(y-1)^2}}\,dy = \int_0^{8/5} \frac{\sin y}{2y}\left(1-(y-1)^2-\frac{y^2}{4}\right)dy$$

$$= \int_0^{8/5} \frac{\sin y}{y}\left(1-1-y^2+2y-\frac{y^2}{4}\right)dy$$

$$= \int_0^{8/5} -\frac{5y}{4}\sin y + 2\sin y\,dy = \cdots$$

ES 9 $\quad \vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\ \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)$

(a) $\partial_y\left(\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \partial_x\left(\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)$ (ci crediamo)

(b) Sì, $\{y>0\}$ è stellato rispetto ad ogni punto

(c) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t-\sin^2 t)(-\sin t) + 2\cos t\sin t\cos t\,dt$
$t \in [0,2\pi]$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\sin t + \sin^3 t\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin t\,dt = 0$$

quindi $\vec{F}$ è conservativo su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (vedere la teoria!)

(d) Cerco $U$ t.c. $\nabla U = \vec{F}(x,y)$ cioè $\begin{cases} \partial_x U = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & (1) \\ \partial_y U = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & (2) \end{cases}$

Da $\partial_y U = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ deduco $U(x,y) = \dfrac{-x}{x^2+y^2} + \varphi(x)$;

sostituendo nella (1) si trova

$$\frac{-(x^2+y^2)+2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(x) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \text{ da cui } \varphi'(x) = 0,\ \varphi = \text{cost.}$$

$U(x,y) = \dfrac{-x}{x^2+y^2}$ è una primitiva di $\vec{F}(x,y)$.

(e) $\displaystyle\int_\alpha \vec{F}(\alpha)\cdot d\alpha = U(\alpha(\tfrac{\pi}{2})) - U(\alpha(0))$ (T. fond. del calcolo per integrali curvilinei)

$$= U(3,0) - U(2,1) = \frac{-3}{3^2} - \left(\frac{-2}{1+2^2}\right) = \cdots$$

ESERCIZIO 10. Si tratta della superficie $z = \sqrt{x^2+y^2}$ dove $x^2+y^2+z^2-2y \le 0$: se $z = \sqrt{x^2+y^2}$ è quindi $x^2+y^2+x^2+y^2-2y \le 0$

ovvero $x^2+y^2-y \le 0$ cioè $x^2+(y-\frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{4}$. L'area è quindi

$x^2+y^2+z^2-2y\le 0$: ma $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e quindi $x^2+y^2+x^2+y^2-2y\le 0$

ovvero $x^2+y^2-y\le 0$ cioè $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\le \frac{1}{4}$. l'area è quindi

$$\int_{x^2+(y-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{2}} \sqrt{1+\|\nabla\sqrt{x^2+y^2}\|^2}\,dx\,dy = \sqrt{2}\int_{x^2+(y-1)^2\le\frac{1}{2}} 1$$

$$=\sqrt{2}\times\frac{\pi}{2}.$$

**ESERCIZIO 11** La superficie è cartesiana $\left(z=\sqrt{4-(x^2+y^2)}\right)$

con $z^2=4-(x^2+y^2)\in[1,2)$ cioè $1^2\le 4-(x^2+y^2)\le 2^2$

$1\le 4-(x^2+y^2)\le 4$

$\Leftrightarrow\ x^2+y^2\le 3.$

Si ha quindi

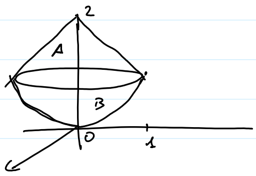
$$\int_\Sigma z\,d\sigma = \int_{x^2+y^2\le 3} z(x,y)\sqrt{1+\|\nabla(\sqrt{4-x^2-y^2})\|^2}\,dx\,dy$$

$$=\int_{x^2+y^2\le 3}\sqrt{4-(x^2+y^2)}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$=\int_{x^2+y^2\le 3} 2\,dx\,dy = 2\pi\times 3 = 6\pi$$

**ES. 12** (a) $z=x^2+y^2$ e $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ di rotazione attorno all'asse $z$. Si traccia $x^2\le z\le 2-x$ in $x>0$, $z$ e si fa ruotare;

$(x^2=2-x\Leftrightarrow x=1$ o $x=-2)$




(b) Flusso uscente da B = − Flusso attraverso $z=x^2+y^2$ con NORMALE orientata verso l'alto

$$\int_{\substack{z=x^2+y^2\\x^2+y^2\le 1}}\vec{F}\cdot\vec{N}\,d\sigma = \int_{x^2+y^2\le 1}\begin{pmatrix}0\\0\\z(x,y)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\partial_x(x^2+y^2)\\-\partial_y(x^2+y^2)\\1\end{pmatrix}dx\,dy$$

$$=\int_{x^2+y^2\le 1}x^2+y^2\,dx\,dy = \int_{\substack{0\le\rho\le 1\\t\in[0,2\pi]}}\rho^3\,d\rho\,dt = \frac{1}{4}2\pi = \pi/2$$

da cui Flusso "uscente" da G attraverso B è $-\frac{\pi}{2}$

Per il Th. della divergenza il flusso di F uscente da G

è $\displaystyle\int_G \operatorname{div}F = \int_G 1\,dx\,dy\,dz = $ Volume di G

= Volume paraboloide $\{x^2+y^2\le z\le 1\}$

+ Volume cono $= \frac{\pi\times 1}{3}$ (base × alt/3)

Il vol. del paraboloide è $\displaystyle\int_{x^2+y^2\le 1}\int_{x^2+y^2}^{1}dz\ dx\,dy$

$$=\int_{x^2+y^2\le 1}1-x^2-y^2\,dx\,dy = 2\pi\int_0^1\rho(1-\rho^2) = 2\pi\left[\frac{1}{2}\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 = 2\pi/4 = \pi/2$$

$\Rightarrow$ Flusso uscente da G $= \boxed{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}$

Ora $\underset{\pi/3+\pi/2}{\text{Fl. uscente da } G} = $ Fl. att. A + $\underbrace{\text{Fl. att. B}}_{=-\pi/2}$

$\Rightarrow$ Flusso attraverso il cono uscente da G $= \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi/3+\pi$

**ESERCIZIO 13.** L'equazione è lineare.

$$y' - 2ty = e^{t^2} \iff \left((y'-2ty)\,e^{-t^2}\right)' = e^{t^2}e^{-t^2}$$

$$\iff (y\,e^{-t^2})' = 1 \qquad y\,e^{-t^2} = t + c$$

$$\iff y(t) = t e^{t^2} + c e^{t^2}$$

La condizione $y(1)=2$ porge $2 = e + ce \Rightarrow c = \frac{2-e}{e}$

e $y(t) = te^{t^2} + \frac{(2-e)}{e}e^{t^2}$

ES 14. $\boxed{y' = \frac{ty}{2\lg y}}$, $y(0) = e$

L'equazione è a variabili separabili: $y' = \frac{t}{2} \cdot \frac{y}{\lg y}$

! NON si TRATTA di una eq. lineare !

Se $y(0)=e$ è $\lg y(0) = \lg e = 1 \neq 0 \Rightarrow \lg y(t) \neq 0$ in un intorno di 0. Si ha

$$\frac{2\,y'\lg y}{y} = t \Rightarrow \int \frac{2y'(t)\lg y(t)}{y(t)}\,dt = \frac{1}{2}t^2 + c$$

$$\Rightarrow \int 2\frac{\lg u}{u}\,du = \frac{1}{2}t^2 + c \qquad (u = y(t))$$

$$\Rightarrow \lg^2 u = \frac{1}{2}t^2 + c \qquad \lg u = \pm\sqrt{\frac{t^2}{2}+c}$$

$$y(t) = e^{\pm\sqrt{\frac{t^2}{2}+c}}$$

Da $y(0)=e$ si ricava $y(0) = e = e^{\pm\sqrt{c}} \Rightarrow$ si deve scegliere il +

e $e^{\sqrt{c}} = e$ cioè $\underline{c=1}$ : $\boxed{y(t) = e^{\sqrt{\frac{t^2}{2}+1}}}$

15. Siano $\vec{F}(x,y) = (y\cos(xy), x\cos(xy)+2)$, e $\gamma$ un cammino che congiunge 0 a $\left(\pi, \frac{1}{2}\right)$. Calcolare $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\gamma$.

$\vec{F}$ è irrotazionale. Infatti:

$$\partial_y\left(y\cos(xy)\right) = \cos(xy) - xy\sin(xy)$$
$$\shortparallel$$
$$\partial_x\left(x\cos(xy)+2\right) = \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

Essendo $\vec{F}$ definito su $\mathbb{R}^2$, che è stellato rispetto ad ogni punto, si ha che $\vec{F}$ è conservativo: determiniamone un potenziale (o primitiva $U$).

È $\begin{cases} \partial_x U = y\cos(xy) & (1) \\ \partial_y U = x\cos(xy)+2 & (2) \end{cases}$

$$(1) \Rightarrow U(x,y) = \int y\cos(xy)\,dx + \varphi(y)$$
$$= \sin(xy) + \varphi(y)$$

$$(2) \Rightarrow \partial_y\left(\sin(xy) + \varphi(y)\right) = x\cos(xy) + 2$$
$$\shortparallel$$
$$x\cos(xy) + \varphi'(y)$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = 2 \Rightarrow \varphi(y) = 2y + \text{cost.}$$

da cui $\boxed{U(x,y) = \sin(xy) + 2y + \text{cost.}}$

Per il Th. fondamentale del calcolo per integrali curvilinei si ha

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\gamma = U\left(\pi, \tfrac{1}{2}\right) - U(0,0)$$
$$= \left(\sin\frac{\pi}{2} + 1\right) - 0 = 2.$$

16. Calcolare il volume di

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2+3y^2+z^2 \le 1,\ 2x^2+3y^2 \le \tfrac{1}{2}\}$$

16. Calcolare il volume di

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 3y^2 + z^2 \le 1,\ 2x^2 + 3y^2 \le \frac{1}{2}\}$$

$$\mathrm{Vol}(A) = \int_{2x^2+3y^2 \le \frac{1}{2}} \int_{-\sqrt{1-(2x^2+3y^2)}}^{\sqrt{1-(2x^2+3y^2)}} 1 \, dz \, dx \, dy$$

$$= 2 \int_{2x^2+3y^2 \le \frac{1}{2}} \sqrt{1-(2x^2+3y^2)} \, dx \, dy$$

Posto $X = \sqrt{2}x$, $Y = \sqrt{3}y$ e

$$\mathrm{Vol}(A) = 2 \int_{X^2+Y^2 \le \frac{1}{2}} \sqrt{1-(X^2+Y^2)} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \, dX \, dY$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \int_{\substack{0 \le \rho \le \frac{1}{\sqrt{2}} \\ t \in [0, 2\pi]}} \rho \sqrt{1-\rho^2} \, d\rho \, dt = \frac{4\pi}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \int_0^{1/\sqrt{2}} \rho\sqrt{1-\rho^2} \, d\rho$$

$$= 2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \pi \left[ -\frac{1}{3} (1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \pi \left( 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{8}}\right)$$

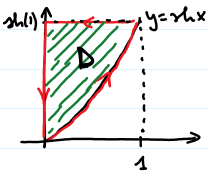
$$= \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \pi \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

18. Sia $\vec{F}(x, y) = \left( \frac{e^x}{\sqrt{1+x^2}}, 2x \right)$, e $D$ l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ \sinh x < y < \sinh 1\}.$$

Determinare l'integrale di $\vec{F}$ sul bordo di $D$, orientato in senso antiorario.

Sol.




Utilizziamo il Teorema di Gauss-Green:

$$\int_{\partial^+ D} \frac{e^x}{\sqrt{1+x^2}} dx + 2x \, dy = \int_D \partial_x(2x) - \partial_y \left( \frac{e^x}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx \, dy$$

$$= \int_D 2 \, dx dy = 2 \int_0^1 \int_{shx}^{sh(1)} 1 \, dy \, dx$$

$$= 2 \int_0^1 (sh(1) - sh(x)) \, dx$$

$$= 2 \left[ sh(1) x - ch(x) \right]_0^1$$

$$= 2 \left( sh(1) - ch(1) + ch(0) \right) =$$

$$= 2 \left( sh(1) - ch(1) + 1 \right)$$

$$= 2 \left( \frac{e - e^{-1}}{2} - \frac{e + e^{-1}}{2} + 1 \right) = 2 \left( 1 - \frac{1}{e} \right).$$