

Esercizi di ricapitolazione - probabilità

1 Condizionata

1. Abbiamo 3 scatole 1,2,3 contenenti la prima due monete da 50 centesimi, la seconda una da 50 centesimi e una da 1 euro, la terza due monete da 1 euro. Si scelga a caso una delle tre scatole, e da questa si estragga una moneta (con probabilità uguale per le 2 monete). La moneta estratta è da 50 centesimi.
 - (a) Qual è la probabilità che la seconda moneta nella scatola sia anch'essa da 50 centesimi?
 - (b) Rimettiamo nella scatola la moneta estratta e estraiamo a caso una moneta che risulta ancora da 50 centesimi. Qual è la probabilità che si tratti della prima scatola?
2. Un'urna contiene 6 palline di cui 3 Bianche, 2 Rosse ed 1 Nera. Si estraggono *senza reimmissione* tre palline e si vince se una delle tre è nera.
 - (a) Qual è la probabilità di vincere ?
 - (b) Qual è la probabilità di vincere sapendo che la pallina Nera non è uscita nelle prime due estrazioni?
 - (c) Sapendo di aver vinto, qual è la probabilità che la pallina Nera non sia uscita nelle prime due estrazioni?

2 Variabili aleatorie

1. Una fabbrica produce dei bulloni con una percentuale di pezzi difettosi del 2%. I bulloni vengono venduti in confezioni da 100 pezzi, e queste vengono sostituite se vi sono almeno 2 bulloni difettosi.
 - (a) Qual è una variabile aleatoria X appropriata per contare il numero di pezzi difettosi in una confezione?
 - (b) Qual è la probabilità di dover sostituire una data confezione?
 - (c) Approssimare il risultato precedente utilizzando una opportuna variabile di Poisson.
2. Il peso del bagaglio di un passeggero che fa il check-in all'aeroporto di Venezia è una variabile aleatoria di media 15 kg e varianza 4 Kg². In un volo per Parigi salgono a bordo 144 persone. Usando un'opportuna variabile aleatoria continua, dare un'approssimazione della probabilità che il peso totale dei loro bagagli superi 2130 kg.
3. Sia F_X la funzione di distribuzione di una variabile aleatoria continua X , definita da

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 6x^4 - 8x^3 + 3x^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (a) Determinare la densità di X ;
 - (b) Determinare il valore atteso di X .
4. Il diametro interno medio delle guarnizioni prodotte da una macchina è 0,502 cm e la deviazione standard è di 0,005 cm. Un pezzo è considerato difettoso se il diametro interno è inferiore a 0.495 o superiore a 0.508. Assumendo la legge normale si calcoli:
 - (a) la percentuale di pezzi non difettosi;
 - (b) la percentuale di quelle per cui il diametro è maggiore di 0,510cm.
 5. Dei pezzi meccanici prodotti da una certa linea di produzione devono avere una lunghezza nominale di 20 cm; sono accettabili pezzi entro i limiti di tolleranza da 19.5 a 20.5 cm. Le lunghezze reali dei pezzi prodotti sono in realtà distribuite normalmente attorno ad una media di 20 cm, con una deviazione standard di 0.25 cm.
 - (a) Quale percentuale dei pezzi prodotti non rispetta i limiti di tolleranza dati?
 - (b) Potendo ricalibrare la linea di produzione, a quale valore dobbiamo ridurre la deviazione standard se vogliamo che il 99% dei pezzi rispettino i limiti di tolleranza?
 6. Sia X una variabile aleatoria binomiale di parametri $(1000, p)$, dove $p \in [0, 1]$.

- (a) Determinare p sapendo che la distribuzione di X si approssima con quella di una variabile di Poisson di parametro 2;
 - (b) Approssimando ora la variabile X con una opportuna variabile normale, fornire un risultato approssimato di $P(X \leq 3)$. (esprimere il risultato tramite la funzione di distribuzione della normale standard sui positivi).
7. Una moneta dà Testa con probabilità $1/4$, Croce con probabilità $3/4$. Ad ogni lancio si vince 1 euro se esce Testa, si perde $1/2$ euro se esce Croce. Si effettuano 16 lanci della moneta. Determinare, utilizzando il Teorema centrale del limite, la probabilità che alla fine dei 16 giochi un giocatore intaschi almeno 1 euro.
8. Nel correggere gli esercizi di una prova scritta incerta, un docente dichiara erroneamente sufficiente una prova con probabilità $1/5$.
- (a) Se nel primo appello vi erano 37 prove incerte, qual è la probabilità che vengano ingiustamente promosse almeno 5 persone (5 incluso)?
 - (b) Approssimare il risultato precedente utilizzando prima una variabile di Poisson, poi una variabile normale.
9. Vi è una probabilità pari al 3% che una macchina fotografica ordinata via internet sia difettosa.
- (a) Determinare la probabilità che, su 1000 macchine fotografiche spedite ve ne siano al più 20 (≤ 20) difettose. Quale variabile aleatoria state considerando?
 - (b) Approssimare il risultato precedente attraverso un'altra variabile aleatoria *discreta*.
 - (c) Approssimare il risultato trovato in a) attraverso un'opportuna variabile aleatoria *continua*.
10. Il numero di chiamate ad un centralino in una data ora è una variabile di Poisson di media 250.
- (a) Qual è la probabilità che chiamino in quell'ora più di 260 persone?
 - (b) Approssimare la probabilità precedente utilizzando la variabile normale, motivandone la ragione. Esprimere il risultato tramite la funzione di distribuzione Φ sui reali positivi.
11. Un vecchio walkman funziona con una sola pila di tipo AAA non ricaricabile; si cambia la pila appena questa è scarica. Con una pila esso funziona con un tempo che è una variabile aleatoria continua T di densità
- $$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{25}t, & t \in [0, 5] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
- (a) Determinare il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria T ;
 - (b) siano T_1 la durata della prima pila sostituita, T_2 la durata della seconda pila sostituita,..., T_m la durata dell' m -esima batteria sostituita,...; descrivere a parole l'evento $T_1 + \dots + T_{72} > 250$;
 - (c) Approssimare la probabilità $P(T_1 + \dots + T_{72} > 250)$: semplificare le espressioni trovate ed esprimere il risultato con un numero esplicito. [Utilizzando la tabella dei valori della distribuzione della normale standard].
12. Il 35% dell'elettorato è a favore di Pinco Pallino. In una sezione elettorale votano 200 persone ("scelte a caso") e X è il numero di quelle che sono a suo favore.
- (a) Determinare la probabilità che $X \geq 75$;
 - (b) Fornire il risultato approssimato utilizzando il teorema centrale del limite;
13. Il numero di errori tipografici di ogni pagina di un libro è una variabile di media $1/2$ e varianza $1/9$. Supponiamo che il numero di errori in una pagina sia indipendente dal numero di errori presenti in ogni altra pagina. Il libro ha 400 pagine.
- (a) Determinare media e varianza della variabile che conta il numero complessivo di errori tipografici nel libro.
 - (b) Fornire una formula approssimata per la probabilità che il libro contenga meno di 180 errori tipografici.

3 Congiunte

3.1 Congiunte discrete

1. Abbiamo tre dadi, uno rosso, uno verde ed uno bianco. Il dado rosso ha le facce numerate da 1 a 6; in quello verde compaiono solo i numeri 1, 2, 3 ciascuno ripetuto due volte; in quello bianco compaiono solo i numeri 1, 2 ciascuno ripetuto tre volte. Lancio il dado rosso; se esce un numero pari lancio il dado verde, altrimenti quello bianco. Indico con X ed Y le variabili aleatorie che registrano rispettivamente l'esito del primo lancio e del secondo lancio dei dadi. Determinare la densità congiunta di X ed Y e calcolare $P(X \leq Y)$.
2. Siano $X_i, i = 1, 2, 3$, variabili aleatorie di Bernoulli indipendenti di parametro $1/(i+1)$. Si considerino le variabili discrete $X = X_1 + X_2$ e $Y = X_2 + X_3$.
 - (a) Si calcoli la densità discreta di X .
 - (b) Si calcoli la densità congiunta discreta di (X, Y) .
 - (c) Usare (b) per determinare la densità discreta di Y in 2.
3. Sia Ω uno spazio campionario e X, Y due variabili aleatorie su Ω che assumono rispettivamente i valori $\{7, 8, 16\}$ e $\{4, 2\}$. Sono conosciute le probabilità congiunte $p(a, b)$ cioè la probabilità che X assuma valore a e che Y assuma valore b .

$$p(7, 4) = 0.1; p(7, 2) = 0.1; p(8, 4) = 0.2; p(8, 2) = 0.3; p(16, 4) = 0.2; p(16, 2) = 0.1$$

- (a) Calcolare le densità di X e Y , cioè le densità marginali.
 - (b) Le due variabili aleatorie sono indipendenti?
 - (c) Calcolare il valore atteso delle v.a. X e Y .
 - (d) Si consideri la variabile aleatoria data dal prodotto XY , trovare i valori assunti. Tra i valori assunti vi è 32: calcolare $P(XY = 32)$.
4. Siano X, Y due variabili aleatorie indipendenti con legge uniforme su $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; si può pensare a due lanci indipendenti di un dado regolare. poniamo $M = \max\{X, Y\}$.
 - (a) Determinare $P(M = j | X = i)$ per i valori di i e j per i quali tale probabilità non è nulla (conviene distinguere i casi $i = j$ e $i \neq j$);
 - (b) dedurre dal punto precedente la densità discreta di M .
 5. Siano X, Y due variabili discrete con legge congiunta

$$p(0, 0) = 1/7, \quad p(0, 1) = 3/7, \quad p(1, 0) = 2/7, \quad p(1, 1) = 1/7.$$

Si dica se X, Y sono indipendenti motivando la risposta.

3.2 Congiunte continue

1. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} 5ye^{-y(x+5)} & \text{se } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la densità congiunta di una variabile congiunta continua (X, Y) . Determinare le densità marginali di X e Y .

2. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} x(y-x)e^{-y} & \text{se } 0 < x < y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la densità congiunta di una variabile congiunta continua (X, Y) . Determinare le densità marginali di X e di Y .

3. Supponiamo che la densità congiunta di due v.a. X ed Y sia

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{se } x, y > 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (a) Determinare la densità marginale di X e di Y ;
 - (b) Sono le v.a. X ed Y indipendenti?
4. Siano X e Y due variabili indipendenti e uniformi su $[0, 1]$. Calcolare

$$P(XY > 1/2)$$

5. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} Kxy & \text{se } 0 < x < 1 - y < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (a) Determinare la costante K in modo che $f(x, y)$ sia la densità congiunta di una v.a. congiunta continua (X, Y) ;
- (b) calcolare le densità marginali di X e di Y ;
- (c) dire se X, Y sono indipendenti.

6. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{se } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la densità congiunta di una variabile congiunta continua (X, Y) .

- (a) X, Y sono indipendenti?
 - (b) Calcolare la covarianza di (X, Y) ;
 - (c) Determinare la densità marginale di X .
7. Sia (X, Y) una variabile congiunta continua uniforme sul quadrato di vertici $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ (cioè la cui densità è costantemente uguale a $1/2$ sul quadrato). Calcolare le densità marginali.
8. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x}/x & \text{se } x > 0, 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la densità congiunta di una variabile congiunta continua (X, Y) .

- (a) Determinare $E(X)$ e $E(Y)$;
- (b) Calcolare la covarianza di (X, Y) : X e Y sono indipendenti?

4 Combinatoria

1. Contare gli anagrammi di MATMAT nei quali non compaiono accanto due lettere uguali.
2. In una casa di quattro piani (oltre al piano terra) un ascensore parte dal piano terra con 5 persone. Non sale nessun altro, e ogni persona scende a caso ad uno dei quattro piani. Calcolare la probabilità che l'ascensore
 - (a) arrivi vuoto al quarto piano;
 - (b) arrivi vuoto al terzo piano;
 - (c) si vuoti esattamente al terzo piano;
 - (d) arrivi al quarto piano con 2 persone.
3. Vogliamo aprire una porta chiusa a chiave. Disponiamo di un mazzo di 100 chiavi che contiene esattamente 2 chiavi che aprono la porta in questione. Le chiavi vengono provate successivamente una ad una.
 - (a) Qual è la probabilità che la 56 - esima chiave apra la porta?
 - (b) Qual è la probabilità che la 56 - esima chiave sia la seconda chiave che apre la porta?