Esercizi di preparazione alla parte di probabilità (FAMP+ MDP).

Bozza delle soluzioni.

CONDIZIONATA

1. (a) $P(2^a \text{ è da } 50) = P(\text{Scat } 1 \mid 1^a \text{ da } 50) = P(1^a\, 50 \mid Sc\,1)\,P(Sc\,1)\,/\,P(1^a\, 50)$

e $P(1^a\, 50) = P(1^a\, 50 \mid Sc\,1)P(Sc\,1) + \dots + P(1^a\, 50 \mid Sc\,3)P(Sc\,3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow P(2^a \text{ da } 50) = \dfrac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$

(b) Utilizziamo le probabilità $Q(A) = P(A \mid \text{la scatola contiene una moneta da 50 cents})$

Ciò equivale a lavorare con le scatole 1 e 2, sapendo che è stata estratta una moneta da 50 cents.

Se A_1 è l'evento "la prima estratta è da 50"
A_2 = "la seconda è da 50" si ha

$$Q(1 \mid A_2) = \frac{Q(A_2 \mid 1)\,Q(1)}{Q(A_2)}.$$ Chiaramente $Q(A_2 \mid 1) = 1$.

Si presti attenzione al fatto che adesso è più probabile che sia stata estratta la moneta dalla scatola 1 che dalla scatola 2. Infatti

$$Q(1) = P(1 \mid A_1) = \frac{P(A_1 \mid 1)P(1)}{P(A_1)} = \frac{1/3}{P(A_1 \mid 1)P(1) + P(A_1 \mid 2)P(2) + P(A_1 \mid 3)P(A_3)}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + 0} = \frac{2}{3},$$ da cui $Q(2) = \frac{1}{3}$.

Si ha poi $Q(A_2) = Q(A_2 \mid 1)\,Q(1) + Q(A_2 \mid 2)\,Q(2)$ ed è

$Q(A_2 \mid 2) = P(A_2 \mid 2 \text{ e } A_1) = \tilde{Q}(A_2 \mid A_1)$ dove $\tilde{Q}(\cdot) = P(\cdot \mid 2)$.

Ora, se è data la scatola, le estrazioni sono indipendenti e quindi $\tilde{Q}(A_2 \mid A_1) = \tilde{Q}(A_2) = P(A_2 \mid 2) = \frac{1}{2}$.

Di conseguenza $Q(1 \mid A_2) = \dfrac{Q(A_2 \mid 1)\,Q(1)}{Q(A_2)} = \dfrac{2/3}{\dots} = \dfrac{2}{\dots} = \dfrac{4}{5}$

Di conseguenza $Q(1|A_2) = \dfrac{Q(A_2|1)Q(1)}{Q(A_2)} = \dfrac{2/3}{1\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{2+\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{5}$

Alternativamente: $Q(1|A_2) = P(1|A_2\cap A_1) = \dfrac{P(A_1A_2|1)P(1)}{P(A_1A_2)}$ ed è

$P(A_1A_2|1) = 1;\ P(1) = \frac{1}{3};$

$P(A_1A_2) = P(A_1A_2|1)P(1) + P(A_1A_2|2)P(2) + P(A_1A_2|3)P(3)$

$= P(A_1|1)P(A_2|1)P(1) + P(A_1|2)P(A_2|2)P(2) + P(A_1|3)P(A_2|3)P(3)$

(dato che, una volta scelta la scatola, le estrazioni sono indipendenti)

$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+0\right) = \frac{1}{3}\times\frac{5}{4}$ da cui

$Q(1|A_2) = \dfrac{P(A_1A_2|1)P(1)}{P(A_1A_2)} = \dfrac{1/3}{\frac{1}{3}\times\frac{5}{4}} = \dfrac{4}{5}.$

2 a) $P(\text{Vincita}) = P(\underbrace{\text{tra le 3 estratte c'è la nera}}_{A})$

Ω = sottoinsiemi di 3 elementi tra $\{B_1, B_2, B_3, R_1, R_2, N\}$

$|\Omega| = \binom{6}{3}$

$A = \{\{N, a, b\},$ con $\{a,b\} \subseteq \{B_1, B_2, B_3, R_1, R_2\}\}$

$|A| = \binom{5}{2} \Rightarrow P(A) = \dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{6}{3}} = \dfrac{5!}{3!\,2!}\times\dfrac{3!\,3!}{6!} = \dfrac{\cancel{5!}}{\cancel{3!}\cancel{2!}}\times\dfrac{\cancel{3!}\cancel{3!}\,3}{\cancel{6!}\,6}$

$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b) P(Nera | le prime due non nere) : si lavora nello spazio camp. ridotto costituito dalle estrazioni di una pallina tra 4, una sola delle quali è nera $\Rightarrow$

$P(\text{Nera} | \text{le prime due non nere}) = \dfrac{1}{4}$

Altro metodo: $P(\text{Nera} | \text{le prime due} \neq \text{Nera}) = \dfrac{P(3^a \text{ nera})}{P(\text{prime due} \neq \text{Nera})}$

1/6 1

Altro metodo: $P(\text{Nera} \mid \text{le prime due} \neq \text{Nera}) = \dfrac{}{P(\text{prime due} \neq \text{Nera})}$

$$= \frac{1/6}{\frac{5\times 4}{6\times 5}} = \frac{1}{4}.$$

c) Lavoriamo nello spazio campionario ridotto F costituito dalle terne ordinate di $\{B_1, B_2, B_3, R_1, R_2, N\}$ tra le quali c'è la N: si ha $|F| = 5\times 4\times 3$ (Nera in 1^a o Nera in 2^a o Nera in 3^a)

l'evento A = "la nera in terza posizione" è costituito da 5×4 eventi elementari di F, da cui $\text{Prob}(A) = \dfrac{|A|}{|F|} = \dfrac{5\times 4}{5\times 4\times 3} = \dfrac{1}{3}$.

Variabili aleatorie

Ex. 1 a) Ogni pezzo prodotto dal macchinario è difettoso con prob. 0,02. La v.a. che conta il numero di pezzi difettosi in 100 tentativi è una binomiale $B(100, 0{,}02)$.

b) $P(B(100,0{,}02) \geq 2) = 1 - P(B(100, 0.02) \leq 1) = 1 - \binom{100}{0} 0.02^0 \times 0.98^{100} -$
$- \binom{100}{1} 0.02 \times 0.98^{99}$.

c) Sia Y una v.a. di Poisson di parametro $100 \times 0.02 = 2$.
Allora $P(B(100, 0.02) \geq 2) \simeq P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - \frac{2^0}{0!}e^{-2} - \frac{2^1}{1!}e^{-2}$.

Ex. 2 Sia X_i la v.a. che misura il peso del bagaglio dell'i-esimo passeggero. Il peso totale dei bagagli è $X_1 + \dots + X_{144}$. Per il T. limite centrale

$$P(X_1 + \dots + X_{144} > 2130) = 1 - P(X_1 + \dots + X_{144} \leq 2130) =$$

$$= 1 - P\left(\frac{X_1 + \dots + X_{144} - 15 \times 144}{\sqrt{144 \times 4}} \leq \frac{2130 - 15 \times 144}{\sqrt{144 \times 4}}\right) \simeq 1 - \Phi\left(-\frac{30}{24}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{5}{4}\right) =$$

$$= 1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{5}{4}\right)\right) = \Phi\left(\frac{5}{4}\right) = \Phi(1.25) = 0.8944$$

Ex. 3 a) $f_X(x) = F_X'(x)$; dunque

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 24x^3 - 24x^2 + 6x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

b) $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x(24x^3 - 24x^2 + 6x)\,dx =$

$$= \frac{24}{5}x^5 - \frac{24}{4}x^4 + \frac{6}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{24}{5} - 6 + 2 = \frac{24 - 20}{5} = \frac{4}{5}.$$

Ex. 4

a) Sia X la v.a. che misura il diametro delle guarnizioni; per ipotesi è una normale di parametri $(0.502, 0.005^2)$: $X = 0.502 + 0.005 Z$.

$$P(0.495 \leq X \leq 0.508) = P\left(\frac{0.495-0.502}{0.005} \leq Z \leq \frac{0.508-0.502}{0.005}\right) =$$

$$= \Phi(1.2) - \Phi(-1.4) = \Phi(1.2) - (1 - \Phi(1.4)) = \Phi(1.2) + \Phi(1.4) - 1 = 0.8041$$

La percentuale di pezzi non difettosi è dunque del 80,41%.

b) $P(X > 0.510) = P\left(Z > \frac{0.510 - 0.502}{0.005}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0.008}{0.005}\right) =$

$= 1 - \Phi(1.6) = 0.0548$. La percentuale cercata è dunque del 5.48%.

Ex. 5 La v.a. X che misura le lunghezze dei pezzi prodotti è una normale di parametri $(20, 0.25^2)$: $X = 20 + 0.25 Z$.

a) $P(19.5 \leq X \leq 20.5) = P\left(\frac{19.5-20}{0.25} \leq Z \leq \frac{20.5-20}{0.25}\right) =$

$= \Phi\left(\frac{0.5}{0.25}\right) - \Phi\left(-\frac{0.5}{0.25}\right) = \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\Phi(2) - 1 = 0.9544$.

Dunque la percentuale dei pezzi che non rispettano i limiti di tolleranza è del 4.56 %

b) Sia σ la deviazione standard da ottenere. Vogliamo:

$$0.99 \leq P(19.5 \leq X \leq 20.5) = \Phi\left(\frac{0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{0.5}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{0.5}{\sigma}\right) - 1$$

Allora $\Phi\left(\frac{0.5}{\sigma}\right) \geq \frac{1+0.99}{2} = 0.995 \implies \frac{0.5}{\sigma} \geq 2.57$, cioè

$\sigma \leq \frac{0.5}{2.57} = 0.195$.

Ex. 6 a) La Poisson che approssima $X = B(1000, p)$ ha parametro $1000 \times p$; dunque $p = \frac{2}{1000} = 0{,}002$.

b) $P(X \leq 3) =$

$$= P\left(\frac{X-2}{\sqrt{2(1-0.002)}} \leq \frac{3-2}{\sqrt{2 \times 0.998}}\right) \simeq \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2 \times 0.998}}\right) = \Phi(0.71)$$

Ex. 7 Sia X_i quanto si guadagna con il lancio i-esimo.
Ogni v.a. X_i assume i valori $+1$ e -0.5. $E[X_i]=$
$= 1\cdot\frac{1}{4} - 0.5\cdot\frac{3}{4} = -\frac{1}{8}$; $\mathrm{Var}(X_i) = E[X_i^2] - E[X_i]^2 = \left(1^2\cdot\frac{1}{4} + 0.5^2\cdot\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{64} =$
$= \frac{7}{16} - \frac{1}{64} = \frac{27}{64}$. Per il T. del limite centrale si ha

$$P(X_1+\dots+X_{16} \geq 1) = P\left(\frac{X_1+\dots+X_{16} - 16\left(-\frac{1}{8}\right)}{\sqrt{16\cdot\frac{27}{64}}} \geq \frac{1-16\left(-\frac{1}{8}\right)}{\sqrt{27}/2}\right) =$$
$$\simeq 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx 1 - \Phi(1.15) \approx 1 - 0.8749 = 0.1251.$$

Ex. 8 a) Sia $X = B(37, \frac{1}{5})$; $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) =$
$= 1 - \sum_{k=0}^{4} \binom{37}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{37-k}$.

b) Sia Y la v.a. di Poisson di parametro $\frac{37}{5}$; allora
$P(X \geq 5) \simeq P(Y \geq 5) = 1 - P(Y \leq 4) = \sum_{k=0}^{4} \frac{(37/5)^k}{k!} e^{-37/5}$.

Sia N la v.a. normale di parametri $\left(\frac{37}{5}, \frac{37}{5}\times\frac{4}{5}\right)$. Allora
$P(X \geq 5) \simeq 1 - P(N < 5)$. Essendo $N = \frac{37}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{37}Z$
si ha $1 - P(N < 5) = 1 - P\left(Z < \frac{5 - 37/5}{\frac{2}{5}\sqrt{37}}\right) = 1 - \Phi(-0.99) =$
$= 1 - (1 - \Phi(0.99)) = \Phi(0.99)$

Ex. 9 a) Sia $X = B(1000; \frac{3}{100})$; $P(X \leq 20) = \sum_{i=0}^{20} \binom{1000}{i}\left(\frac{3}{100}\right)^i\left(\frac{97}{100}\right)^{1000-i}$.

b) Sia Y la v.a. di Poisson di parametro $30 = 1000 \times \frac{3}{100}$. Allora
$P(X \leq 20) \simeq P(Y \leq 20) = \sum_{i=0}^{20} \frac{30^i}{i!} e^{-30}$.

c) Sia N la v.a. normale di parametri $(30; 29.1)$. Allora
$N = 30 + \sqrt{29.1}\, Z$. $P(X \leq 20) \simeq P(N \leq 20) = P\left(Z \leq \frac{-10}{\sqrt{29.1}}\right) =$
$= \Phi(-1.85) = 1 - \Phi(1.85) = 1 - 0.9678$.

Ex. 10 Sia Y una v.a. di Poisson di parametro 250. Allora

a) $P(Y > 260) = 1 - P(Y \le 260) = 1 - \sum_{i=0}^{250} \frac{250^i}{i!} e^{-250}$.

b) Y è somma di n Poisson indipendenti di parametro $\frac{250}{n}$.
Per il T. del limite centrale si ha $P(Y > 260) = 1 - P(Y \le 260) =$

$$= 1 - P\left(\frac{Y_1 + \dots + Y_n - 250}{\sqrt{250}} \le \frac{10}{\sqrt{250}}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{250}}\right) = 1 - \Phi(0.63) = 0.2643$$

Ex. 11 a) $E[T] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_T(x)\,dx = \int_0^5 x \frac{2}{25} x\,dx = \frac{2}{25}\frac{1}{3}x^3\Big|_0^5 = \frac{10}{3}$;

$E[T^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_T(x)\,dx = \int_0^5 x^2 \frac{2}{25} x\,dx = \frac{2}{25}\frac{1}{4}x^4\Big|_0^5 = \frac{25}{2}$; allora

$\mathrm{Var}\, T = E[T^2] - E[T]^2 = \frac{25}{2} - \frac{100}{9} = \frac{25}{18}$.

b) L'evento significa che con 72 pile il walkman funziona per più di 250 ore (?).

c) $P(T_1 + \dots + T_{72} > 250) = 1 - P(T_1 + \dots + T_{72} \le 250) = 1 - P\left(\frac{T_1 + \dots + T_{72} - 72 \cdot \frac{10}{3}}{\sqrt{72 \cdot \frac{25}{18}}} \le \right.$

$$\left. \le \frac{250 - 72 \cdot \frac{10}{3}}{\sqrt{72 \cdot \frac{25}{18}}}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{10}{\frac{6 \cdot 5}{3}}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587.$$

Ex. 12 a) X è una binomiale di parametri $(200, 0.35)$; $P(X \ge 75) =$

$$= \sum_{k=75}^{200} \binom{200}{k} 0.35^k \times 0.65^{200-k}.$$

b) X è somma di 200 Bernoulli di parametro 0.35. Allora

$$P(X \ge 75) = 1 - P(X \le 74) = 1 - P\left(\frac{X_1 + \dots + X_{200} - 200 \times 0.35}{\sqrt{200 \times 0.35 \times 0.65}} \le \frac{74 - 200 \times 0.35}{\sqrt{200 \times 0.35 \times 0.65}}\right)$$

$= 1 - \Phi(0.59)$.

Ex. 13 a) La v.a. che conta il numero di errori tipografici totale è $X_1 + \dots + X_{400}$ dove X_i è la v.a. che conta il numero di errori nella pagina i. $X = X_1 + \dots + X_{400}$ ha media $400 \times \frac{1}{2} = 200$ e varianza $400 \times \frac{1}{9}$.

b) Per il T. del limite centrale si ha:

$$P(X < 180) = P\left(\frac{X_1 + \dots + X_{400} - 200}{\sqrt{400/9}} < \frac{180 - 200}{\sqrt{400/9}}\right) \simeq \Phi\left(-\frac{20}{20/3}\right) =$$

$$= \Phi(-3) = 1 - \Phi(3) = 0.0013.$$

Congiunte Discrete

Ex. 1 La v.a. X assume i valori $1,2,3,4,5,6$; la v.a. Y assume i valori $1,2,3$.

$$p_{X,Y}(1,1) = P(X=1,\ Y=1) = P(Y=1 \mid X=1)\,P(X=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$$

$$p_{X,Y}(1,2) = P(X=1, Y=2) = P(Y=2 \mid X=1)\,P(X=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$$

$$p_{X,Y}(1,3) = P(X=1, Y=3) = P(Y=3 \mid X=1)\,P(X=1) = 0\cdot\frac{1}{6}$$

$$p_{X,Y}(2,1) = P(X=2, Y=1) = P(Y=1 \mid X=2)\,P(X=2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}$$

Analogamente $p_{X,Y}(2,2) = p_{X,Y}(2,3) = p_{X,Y}(4,1) = p_{X,Y}(4,2) = p_{X,Y}(4,3) = p_{X,Y}(6,1) = p_{X,Y}(6,2) = p_{X,Y}(6,3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}$; mentre $p_{X,Y}(3,1) = p_{X,Y}(3,2) = p_{X,Y}(5,1) = p_{X,Y}(5,2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$ e $p_{X,Y}(3,3) = p_{X,Y}(5,3) = 0$.

$$P(X\le Y) = p_{X,Y}(1,1) + p_{X,Y}(1,2) + p_{X,Y}(1,3) + p_{X,Y}(2,2) + p_{X,Y}(2,3) + p_{X,Y}(3,3) =$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + 0 .$$

Ex. 2 La v.a. X assume i valori $0,1,2$; si ha

a) $P(X=0) = P(X_1=0, X_2=0) = P(X_1=0)\,P(X_2=0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$

$$P(X=1) = P\big((X_1=0, X_2=1) \cup (X_1=1, X_2=0)\big) = P(X_1=0)P(X_2=1) + P(X_1=1)P(X_2=0) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=2) = P(X_1=1, X_2=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} .$$

b) Le variabili X, Y assumono al più i valori $0, 1, 2$. Per ogni $i, j \in \{0,1,2\}$ si ha

$$P(X=i, Y=j) = P(X_1+X_2=i, X_2+X_3=j) = \sum_{k=0}^{1} P(X_2=k, X_1=i-k, X_3=j-k) = \sum_{k=0}^{1} P(X_2=k)P(X_1=i-k)P(X_3=j-k)$$

Pertanto:

$$p_{X,Y}(0,0) = P(X_1=0)P(X_2=0)P(X_3=0) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{4}; \quad p_{X,Y}(0,1) = P(X_2=0)P(X_1=0)P(X_3=1) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{3\times4}$$

$$p_{X,Y}(0,2) = 0, \quad p_{X,Y}(1,0) = P(X_2=0)P(X_1=1)P(X_3=0) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$p_{X,Y}(1,1) = P(X_2=0)P(X_1=1)P(X_3=1) + P(X_2=1)P(X_1=0)P(X_3=0) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{2\times4}$$

$$p_{X,Y}(1,2) = P(X_2=1)P(X_1=0)P(X_3=1) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$$

$$p_{X,Y}(2,0) = 0, \quad p_{X,Y}(2,1) = P(X_2=1)P(X_1=1)P(X_3=0) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{2\times4}; \quad p_{X,Y}(2,2) = P(X_2=1)P(X_1=1)P(X_3=1) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}.$$

c) $p_Y(0) = \sum_{k=0}^{2} p_{X,Y}(k,0) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; $p_Y(1) = \sum_{k=0}^{2} p_{X,Y}(k,1) = \frac{2}{12}+\frac{2}{8} = \frac{5}{12}$; $p_Y(2) = \sum_{k=0}^{2} p_{X,Y}(k,2) = \frac{1}{12}$

Ex. 3 a) Si ha $p_X(7) = 0,1 + 0,1 = 0,2$; $p_X(8) = 0,5$; $p_X(16) = 0,3$; $p_Y(4) = 0,1 + 0,2 + 0,2 = 0,5$; $p_Y(2) = 0,5$.

b) Se fossero indipendenti: $0,1 = P(16,2) = p_X(16) \times p_Y(2) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$.

c) $E[X] = 7 \times 0,2 + 8 \times 0,5 + 16 \times 0,3$ $E[Y] = 4 \times 0,5 + 2 \times 0,5$

d) XY assume i valori: $7 \times 4, 7 \times 2, 8 \times 4, 8 \times 2, 16 \times 4, 16 \times 2$.

$P(XY = 32) = P\left(\left[(X,Y) = (16,2)\right] \cup \left[(X,Y) = (8,4)\right]\right) = 0,1 + 0,2$

Ex. 4 Se $j < i$, $P(M = j \mid X = i) = 0$; se $j = i$ si ha $P(M = i \mid X = i) = P(Y \leq i) = \frac{i}{6}$; se $j > i$, $P(M = j \mid X = i) = P(Y = j) = \frac{1}{6}$.

Allora $P(M = k) = P(M = k \mid X = 1) P(X = 1) + \ldots + P(M = k \mid X = 6) P(X = 6)$

e dunque $P(M = 1) = \frac{1}{36}$; $P(M = 2) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36}$; $P(M = 3) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{3}{36}$; $P(M = 4) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{36}$; $P(M = 5) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{5}{36}$; $P(M = 6) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{6}{36}$.

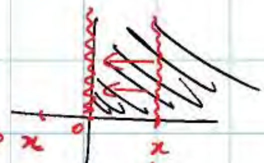
Ex. 5 $p_X(0) = 4/7$ $p_Y(0) = 3/7$; $\frac{1}{7} = p(0,0) \neq p_X(0) \cdot p_Y(0) = \frac{12}{49}$. Pertanto X e Y non sono indipendenti.

Esercizi di preparazione alla probabilità (MDP + FAMP)

BOZZA DI SOLUZIONE

VARIABILI CONGIUNTE CONTINUE.

1) $f(x,y) = \begin{cases} 5y e^{-y(x+5)} & \text{se } x>0, y>0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$



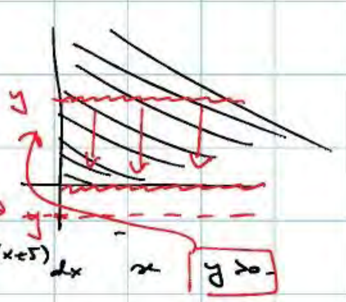
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} 0 & \text{se } \boxed{x \le 0} \\ \int_0^{+\infty} 5y e^{-y(x+5)}\,dy & \text{se } \boxed{x>0} \end{cases}$

Integriamo per parti $(x>0)$

$$\int_0^{+\infty} 5y e^{-y(x+5)}\,dy = 5y\left(-\frac{1}{(x+5)} e^{-y(x+5)}\right)_{y=0}^{y=+\infty} + \frac{5}{x+5}\int_0^{+\infty} e^{-y(x+5)}\,dy$$

$$= -\frac{5}{(x+5)^2}\left[e^{-y(x+5)}\right]_{y=0}^{+\infty} = \frac{5}{(x+5)^2}.$$

$$\Rightarrow \quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ \frac{5}{(x+5)^2} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

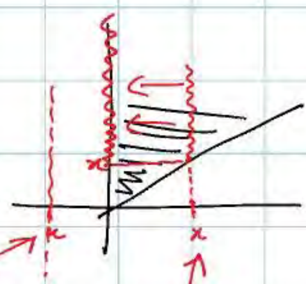


- $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } \boxed{y \le 0} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^{+\infty} 5y e^{-y(x+5)}\,dx & \text{se } \boxed{y>0} \end{cases}$

Per $y>0$ è $\int_0^{+\infty} 5y e^{-y(x+5)}\,dx = 5y\left[-\frac{1}{y} e^{-y(x+5)}\right]_{x=0}^{x=+\infty} = 5e^{-5y}.$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \le 0 \\ 5e^{-5y} & \text{se } y>0. \end{cases}$$

2) $f(x,y) = \begin{cases} x(y-x)e^{-y} & \text{se } 0<x<y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$



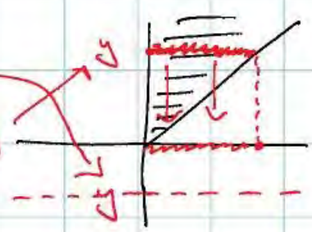
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} 0 & \text{se } \boxed{x \le 0} \\ \int_x^{+\infty} x(y-x)e^{-y}\,dy & \text{se } \boxed{x>0} \end{cases}$$

Per $x>0$ è $\int_x^{+\infty} x(y-x)e^{-y}\,dy = x\int_x^{+\infty} y e^{-y}\,dy - x^2\int_x^{+\infty} e^{-y}\,dy$

$$= x\left(\left[-y e^{-y}\right]_{y=x}^{y=+\infty} + \int_x^{+\infty} e^{-y}\,dy\right) + x^2\left[e^{-y}\right]_x^{+\infty}$$

$$= x\left(x e^{-x} - \left[e^{-y}\right]_x^{+\infty}\right) - x^2 e^{-x} = x^2 e^{-x} + x e^{-x} - x^2 e^{-x} = x e^{-x}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } \boxed{y \le 0} \\ \int_0^y x(y-x)e^{-y}\,dx & \boxed{y>0} \end{cases}$$



Per $y>0$ è

$$\int_0^y x(y-x)e^{-y}\,dx = e^{-y}\int_0^y xy - x^2\,dx = e^{-y}\left[\frac{x^2}{2}y - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=y}$$

$$= e^{-y}\left(\frac{y^3}{2} - \frac{y^3}{3}\right) = \frac{y^3 e^{-y}}{6}.$$

3. $$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0 \;\; y>0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}\,dy & \text{se } x>0 \end{cases}$$

Se $x>0$ è $\int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}\,dy = e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = e^{-x}\left[-e^{-y}\right]_{y=0}^{+\infty} = e^{-x}.$

Per simmetria si ottiene subito

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \le 0 \\ e^{-y} & \text{se } y>0. \end{cases}$$

(b) X, Y sono indipendenti se e solo se $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$.

Qui $$f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} e^{-x}e^{-y} = e^{-(x+y)} & \text{se } x>0,\, y>0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = f(x,y):$$

X, Y SONO indipendenti.

(4) $X \sim U(0,1) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti}. \end{cases}$

Analogamente $f_X(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

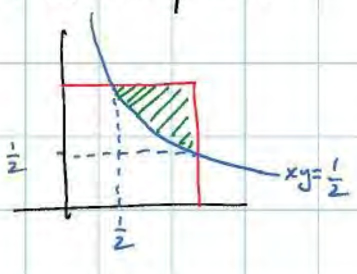
Per l'indipendenza di X, Y si ha

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x,y \in [0,1]\times[0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$P(XY > \frac{1}{2}) = P((X,Y) \in A)$ dove

$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy > \frac{1}{2}\}$. Per definizione si ha quindi

$$P(XY>\tfrac{1}{2}) = \int_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_{A\cap[0,1]\times[0,1]} 1\,dx\,dy$$



Ora $A\cap[0,1]\times[0,1]$

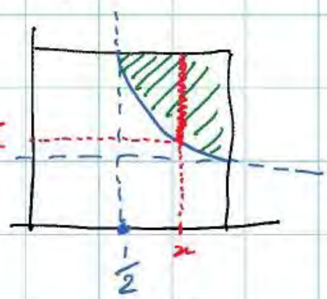
$$\| $$

$$\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1] : xy>\tfrac{1}{2}\} = \{(x,y)\in\,]0,1[\times]0,1[: y > \tfrac{1}{2x}\}$$

(figura)

ed è quindi

$$P(XY>\tfrac{1}{2})=\int_{\substack{xy>\frac{1}{2}\\ x\in]0,1[\\ y\in]0,1[}} 1\,dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left\{\int_{\frac{1}{2x}}^{1} dy\right\}dx$$



$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(1-\frac{1}{2x}\right)dx = \left[x - \frac{1}{2}\lg x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lg\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lg 2.$$

5) $f(x,y) = \begin{cases} Kxy & \text{se } 0<x<1-y<1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

(a) $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \iff K\int_A xy\,dx\,dy = 1$

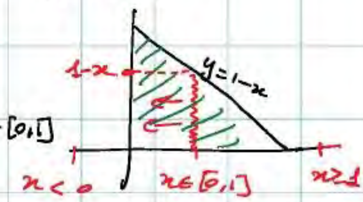
Ora $\int_A xy\,dx\,dy = \int_0^1\left\{\int_0^{1-x} xy\,dy\right\}dx = \int_0^1 x\left\{\int_0^{1-x} y\,dy\right\}dx$

$$= \int_0^1 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1+x^2-2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{24}$$

Deve quindi essere $\frac{K}{24}=1$, da cui $K=24$.

(b) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ \int_0^{1-x} 24xy\,dy & \text{se } x\in[0,1] \\ 0 & \text{se } x>1 \end{cases}$



ed è, per $x\geq 0$, $\int_0^{1-x} 24xy\,dy = 24x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x}$

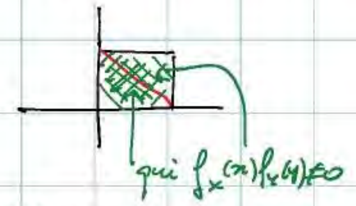
$$= 12x(1-x)^2.$$

Per simmetria si ottiene $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y<0 \\ 12y(1-y)^2 & \text{se } y\in[0,1] \end{cases}$

Per simmetria si ottiene $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y<0 \\ 12y(1-y)^2 & \text{se } y\in[0,1] \\ 0 & \text{se } y>1. \end{cases}$

(c) Di sicuro X,Y NON SONO INDIPENDENTI: se lo fossero sarebbe $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ ma allora

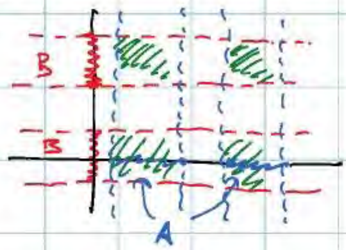
$$f(x,y)\neq 0 \iff f_X(x)\neq 0 \text{ e } f_Y(y)\neq 0$$
$$\iff x\in]0,1[\text{ e } y\in]0,1[$$
$$\iff (x,y)\in]0,1[\times]0,1[$$



ma allora $f(x,y)\neq 0$ in $1>y>1-x>0$: ASSURDO.

OSS: In generale questo ragionamento mostra che se X,Y sono indipendenti allora l'insieme dove $f(x,y)\neq 0$ è il prodotto cartesiano di due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$: infatti se $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ è

$$f_{X,Y}(x,y)\neq 0 \iff f_X(x)\neq 0 \text{ e } f_Y(y)\neq 0$$
$$\iff (x,y)\in A\times B \text{ dove}$$
$$A = \{x : f_X(x)\neq 0\},\quad B=\{y : f_Y(y)\neq 0\}$$



Pertanto, se l'insieme dove $f_{X,Y}$ è non nullo NON è un prodotto cartesiano di insiemi, necessariamente X,Y NON sono indipendenti

6. $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } (x,y)\in[0,1]\times[0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

*(NON FACILE prima di avere fatto (b) o (c)).

(a) Proveremo la non indipendenza di X,Y anche nei punti (b) e (c). Si poteva qui vedere subito che X,Y non sono indipendenti: ricordiamo infatti che X,Y sono indipendenti $\iff f_{X,Y}(x,y)$ è del tipo $g(x)h(y)$.

Ora se $f(x,y) = g(x)h(y)$ è $x+y = g(x)h(y)$ $\forall x,y\in[0,1]$ ma allora $x+0 = g(x)h(0)$ e $0+y = g(0)h(y)$ cioè $g(x) = c_1x$, $h(y) = c_2y$ per qualche c_1, c_2 da cui

$x+y = e\, xy \quad \forall x,y \in [0,1]$ per qualche x,y: ASSURDO.

(b) $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Si ha $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 x(x+\frac{1}{2})dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2\right]_0^1 = \frac{7}{12}$.

analogamente è $E(Y) = 3/4$; mentre

$$E(XY) = \int_{\mathbb{R}^2} xy f(x,y)\,dx\,dy = \int_{[0,1]\times[0,1]} xy(x+y)dx\,dy$$

$$= \int_{[0,1]\times[0,1]} x^2y\,dx\,dy + \int_{[0,1]\times[0,1]} xy^2 dx\,dy = \left(\int_0^1 x^2 dx\right)\int_0^1 y\,dy + \int_0^1 x\,dx\left(\int_0^1 y^2 dy\right)$$

$$= 2\int_0^1 x^2 dx \int_0^1 y\,dy = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$ da cui

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12}\right)^2$$

OSS: essendo $Cov(X,Y) \neq 0$ si poteva da qui dedurre che X,Y NON sono indipendenti.

(c) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [0,1] \\ \int_0^1 x+y\,dy & \text{se } x\in[0,1]; \end{cases}$$

per $x\in[0,1]$ si ha $\int_0^1 x+y\,dy = \left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^1 = x+\frac{1}{2}$.

Per simmetria si ha $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y\notin[0,1] \\ y+\frac{1}{2} & \text{se } y\in[0,1]. \end{cases}$

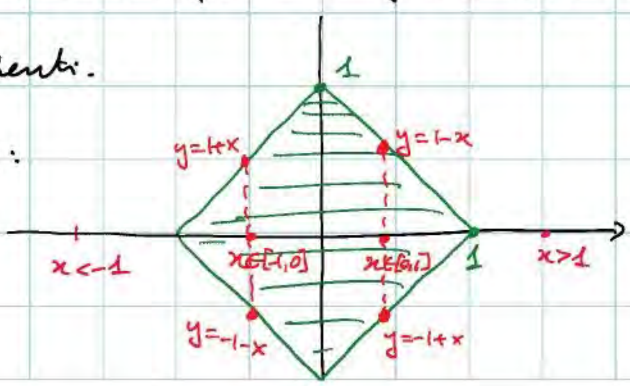
Si ha $f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y)\notin[0,1]\times[0,1] \\ (x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2}) \end{cases}$;

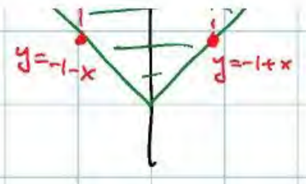
in particolare è $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x,y)$ se $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$.

abbiamo così ulteriormente verificato il fatto che X,Y NON sono indipendenti.

7) $(X,Y) \sim U(Q)$ $\quad Q$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } (x,y)\in Q \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$





$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } x<-1 \text{ o } x>1 \\ \displaystyle\int_{-1-x}^{1+x} \frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}(1+x+1+x) = 1+x & \text{se } x\in[-1,0] \\ \displaystyle\int_{-1+x}^{1-x} \frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}(1-x+1-x) = 1-x & \text{se } x\in[0,1]. \end{cases}$$

Per SIMMETRIA è $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y<-1 \text{ o } y>1 \\ 1+y & \text{se } y\in[-1,0] \\ 1-y & \text{se } y\in[0,1]. \end{cases}$

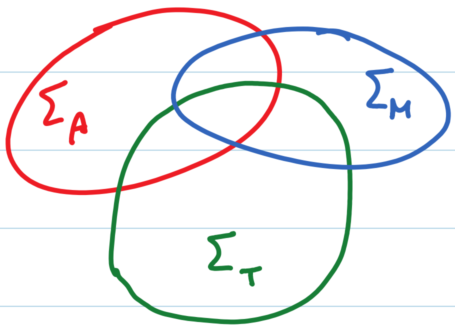
Si osservi che X,Y NON sono indipendenti perché $f(x,y) \neq f_X(x)\, f_Y(y)$ (lo si poteva anche dedurre senza nessun calcolo dal fatto che l'insieme dove $f(x,y)\neq 0$ non è un prodotto cartesiano (si veda l'osservazione alla fine dell'Es. 5)

4. Combinatoria

1. Siano Σ_A, Σ_M, Σ_T rispettivamente gli anagrammi (ovvero 6-sequenze di $\{M, A, T\}$ con due A, due M, due T) che hanno due A (risp. due M, due T) vicine.
Stiamo cercando $|\Sigma_A^c \cap \Sigma_M^c \cap \Sigma_T^c| = |\Omega \setminus \Sigma_A \cup \Sigma_M \cup \Sigma_T|$ dove Ω = insieme degli anagrammi. Si ha

$|\Omega \setminus \Sigma_A \cup \Sigma_M \cup \Sigma_T| = |\Omega| - |\Sigma_A \cup \Sigma_M \cup \Sigma_T|$ ed è

$$|\Sigma_A \cup \Sigma_M \cup \Sigma_T| = |\Sigma_A| + |\Sigma_M| + |\Sigma_T| - |\Sigma_A \cap \Sigma_M| - |\Sigma_A \cap \Sigma_T| - |\Sigma_M \cap \Sigma_T| + |\Sigma_A \cup \Sigma_M \cup \Sigma_T|$$



Ora $|\Sigma_A|$ = #anagrammi di $\boxed{AA}$ MTMT $= \frac{5!}{(2!)^2}$
$= |\Sigma_M| = |\Sigma_T|$;

$|\Sigma_A \cap \Sigma_T|$ = #anagrammi di M$\boxed{AA}\boxed{TT}$M $= \frac{4!}{2!}$
$= |\Sigma_A \cap \Sigma_M| = |\Sigma_M \cap \Sigma_T|$

$|\Sigma_A \cap \Sigma_M \cap \Sigma_T|$ = # anag. di $\boxed{AA}\boxed{MM}\boxed{TT}$ $= 3!$

da cui $|\Sigma_A \cup \Sigma_M \cup \Sigma_T| = 3 \times \frac{5!}{(2!)^2} - 3 \times \frac{4!}{2!} + 3!$

$$= 3 \times \frac{5 \times \cancel{4} \times 3 \times 2}{\cancel{2 \times 2}} - 3 \times 4 \times 3 + 6$$

$$= 90 - 36 + 6 = 60$$ da cui

$$|\Sigma_A^c \cap \Sigma_M^c \cap \Sigma_T^c| = \frac{6!}{(2!)^3} - 60 = \frac{6 \times 5 \times \cancel{4} \times 3 \times \cancel{2}}{\cancel{2 \times 2 \times 2}} - 60$$

$$= 90 - 60 = 30.$$

2 Possiamo descrivere l'esito della salita dell'ascensore come una 5-sequenza di $\{1,2,3,4\}$: così

le 5 persone   i piani

la sequenza (a,b,c,d,e) indica che la persona 1 è scesa al piano a, la 2 al piano b, .. la 5 al piano e. Tutte le 5-sequenze (in tutto 4^5) sono ugualmente probabili.

a) A = vuoto al 4° piano = 5-seq. di $\{1,2,3\}$: $|A| = 3^5$

$P(A) = 3^5/4^5$

b) B = vuoto al 3° piano = 5-seq. di $\{1,2\}$: $|B| = 2^5$

$P(B) = \left(\frac{2}{4}\right)^5 = \frac{1}{2^5}$

c) C = Si vuoti esatt. al 3° piano

= 5-seq. di $\{1,2,3\}$ con almeno un 3

= $\{$5-sequenze di $\{1,2,3\}\} \setminus \{$5-sequenze di $\{1,2\}\}$

$= 3^5 - 2^5$

$P(C) = \frac{3^5 - 2^5}{4^5}$.

d) D = arrivi al 4° piano con 2 persone

D = 5-seq. di $\{1,2,3,4\}$ con esattamente 2 "4":

Per formare una tale sequenza:

- Scelgo le 2 posizioni per il 4: $\binom{5}{2}$ scelte
- Riempio le altre 3 posizioni con $\{1,2,3\}$: in tutto 3^3 modi

$\Rightarrow |D| = 3^3 \times \binom{5}{2}$ $P(D) = \frac{3^3 \times \binom{5}{2}}{4^5}$.

3. Ω = permutazioni di $\{1, 2, \dots, 100\}$; supponiamo che 1 e 2 aprano la porta ; $|\Omega| = 100!$

(a) A = permutazioni con 1 o 2 in 56-esima posiz.

$$|A| = 2 \times 99! \Rightarrow P(A) = \frac{2 \times 99!}{100!} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$

(b) A = permutazioni con 1 o 2 in 56-esima e 1 o 2 tra 1 e 55

Per formare una tale sequenza con 1 in posiz. 56:

- scelgo la pos. del 2 tra 55 posizioni
- metto 98 numeri in 98 posizioni: 98! modi

$\Rightarrow$ $55 \times 98!$ modi; idem per il # di sequenze con 2 in pos. 56. Quindi

$$P(\text{la 56-esima è la } 2^a \text{ chiave che apre}) = \frac{2 \times 55 \times 98!}{100!}$$

$$= \frac{110}{100 \times 99} = \frac{55}{50 \times 99} = \frac{11}{5 \times 99} = \frac{1}{45}$$