

Esercizi di probabilità

Nota: le domande contrassegnate da (*) non sono al programma 2012/13.

1 Combinatoria

1. Contare gli anagrammi di MATMAT nei quali non compaiono accanto due lettere uguali.

2 Bayes e condizionate

1. La probabilità che domani piova è del 55%. La sera precedente ad un giorno di pioggia, Giuseppe ha sempre mal di schiena; i dolori alla schiena affliggono il povero Giuseppe nel 70% delle serate. Se stasera Giuseppe avrà male alla schiena, quant'è la probabilità che domani piova?
2. Viene fermato dalla polizia un automobilista che è passato con il rosso. Statisticamente, se uno è *sobrio* non passa con il rosso; se uno è *alticcio* passa con il rosso 1 volta ogni 25 semafori; se uno ha *bevuto molto* passa con il rosso 1 volta ogni 10 semafori; se uno è *completamente ubriaco*, non vede nemmeno il semaforo e passa a prescindere che sia rosso, giallo o verde. Determinare la probabilità che il fermato sia completamente ubriaco, sapendo che mediamente una persona che si mette alla guida è *sobria* nel 75% dei casi, è *alticcio* nel 15% dei casi, ha *bevuto molto* nel 7% dei casi, è *completamente ubriaca* nel 3% dei casi.
3. Abbiamo perso un ago in uno tra tre pagliai; l'ago può trovarsi con uguale probabilità in ognuno dei 3 pagliai. Se l'abbiamo perso nel primo, la probabilità di ritrovarlo è del 5%; se l'abbiamo perso nel secondo, la probabilità di ritrovarlo è del 10%; se l'abbiamo perso nel terzo, la probabilità di ritrovarlo è del 2%. sapendo che non si è trovato l'ago nel primo pagliaio, determinare la probabilità condizionata che si trovi nel primo pagliaio e la probabilità condizionata che si trovi nel secondo.
4. Sul commercio si distinguono 2 tipi di PC, quelli affidabili e quelli non affidabili. I primi hanno un guasto entro l'anno nell'1% dei casi, mentre i secondi nel 10% dei casi. L'80% dei PC è affidabile. Si acquista un PC, siano A , R_1 e R_2 gli eventi:
 A : "Il PC è affidabile"; R_1 : "Il PC ha un guasto nel primo anno di vita"; R_2 : "Il PC ha un guasto nel secondo anno di vita". Determinare le probabilità
 - (a) $P(R_1)$;
 - (b) $P(A|R_1)$.
5. Abbiamo 3 scatole 1,2,3 contenenti la prima due monete da 50 centesimi, la seconda una da 50 centesimi e una da 1 euro, la terza due monete da 1 euro. Si scelga a caso una delle tre scatole, e da questa si estraiga una moneta (con probabilità uguale per le 2 monete). La moneta estratta è da 50 centesimi.
 - (a) Qual è la probabilità che la seconda moneta nella scatola sia anch'essa da 50 centesimi?
 - (b) Rimettiamo nella scatola la moneta estratta e ne estraiamo a caso una moneta che risulta ancora da 50 centesimi. Qual è la probabilità che si tratti della prima scatola?
6. Uno strumento permette di controllare il funzionamento di un certo tipo di componenti elettronici. Lo strumento rileva che un componente difettoso è difettoso nel 95% dei casi, che un componente buono è buono nel 97% dei casi. Si estrae a caso un componente da un lotto la cui difettosità (= percentuale di componenti difettosi) è uguale al 5%. Qual è la probabilità che il componente estratto sia difettoso, dato che lo strumento lo rileva difettoso?
7. È noto che i gemelli possono essere dei veri gemelli, e in questo caso sono dello stesso sesso, o degli pseudo-gemelli, e in tal caso la probabilità che siano dello stesso sesso vale $1/2$. Sia p la probabilità che due gemelli siano veri gemelli.
 - (a) Determinare la probabilità che due gemelli siano veri gemelli sapendo che sono dello stesso sesso;

- (b) qual è la probabilità che due gemelli siano di sesso diverso?
8. La probabilità di colpire un bersaglio al tiro a segno con una buona carabina è $1/4$, con una meno buona è $1/6$. Un giocatore sceglie a caso una tra 6 carabine, di cui una è buona.
- (a) Il giocatore spara un colpo con una carabina; qual è la probabilità di colpire il bersaglio?
- (b) Sapendo che il tiratore ha colpito il bersaglio, qual è la probabilità che abbia usato la carabina buona?
9. Dieci urne contengono tutte 4 palline Rosse e un numero variabile di palline Bianche: più precisamente l'urna i ($i = 1, \dots, 10$) contiene 4 palline R e i palline B. Un'urna viene scelta a caso e da essa vengono estratte 2 palline.
- (a) Qual è la probabilità che una pallina sia Bianca e una sia Rossa?
- (b) vengono effettivamente estratte una pallina Bianca e una Rossa: qual è la probabilità p_i che le palline siano state estratte dall'urna i ?
10. Suona il telefono cellulare di Giuseppe. Il suo numero è noto solo alla moglie Silvana, al figlio Stefano ed alla collega Sandra. Giuseppe rimane al telefono per più di due minuti con Silvana una volta su 10, con Stefano tre volte su 10 e con Sandra sette volte su 10. Mediamente Stefano chiama il padre una volta al giorno, Silvana chiama il marito nove volte al giorno e Sandra chiama il collega quattro volte al giorno.
- (a) Determinare la probabilità che Giuseppe rimanga al telefono per più di due minuti.
- (b) Se la telefonata dura più di due minuti, qual è la probabilità che Giuseppe abbia parlato con il figlio?
11. Un'urna contiene 6 palline di cui 3 Bianche, 2 Rosse ed 1 Nera. Si estraggono *senza reimmissione* tre palline e si vince se una delle tre è nera.
- (a) Qual è la probabilità di vincere ?
- (b) Qual è la probabilità *condizionata* di vincere sapendo che la pallina Nera non è uscita nelle prime due estrazioni?
- (c) Sapendo di aver vinto, qual è la probabilità *condizionata* che la pallina Nera non sia uscita nelle prime due estrazioni?
- [In tutte le risposte a questo esercizio semplificare le espressioni ed esprimere i risultati con delle frazioni esplicite.]

3 Variabili aleatorie discrete

- (a) Un'azienda produce occhiali utilizzando tre diversi macchinari. Il primo macchinario produce mediamente un paio di occhiali difettosi ogni 100 paia, il secondo ogni 200, il terzo ogni 300. gli occhiali vengono imballati in scatole identiche contenenti 100 paia. Ogni scatola contiene occhiali prodotti da una sola delle tre macchine. Si supponga che il primo macchinario abbia una produzione doppia rispetto agli altri due, cioè una scatola scelta a caso ha probabilità $1/2$ di essere prodotta dal primo macchinario, $1/4$ dal secondo e $1/4$ dal terzo. Un ottico riceve una di queste scatole.
- i. qual è la probabilità che trovi almeno un paio difettoso?
- ii. Se l'ottico trova esattamente due paia difettose, qual è la probabilità che gli occhiali della scatola ricevuta dall'ottico siano stati prodotti dal primo macchinario?
- (b) Un tecnico è chiamato in una ditta per intervenire su una macchina che si sta rivelando inaffidabile. Infatti, essa produce un pezzo su 5 difettoso, mentre le altre 3 macchine identiche che si trovano in quella ditta producono solo 1 pezzo su 100 difettoso. Il tecnico entra nella ditta, sceglie una macchina a caso tra le 4 identiche e osserva un pezzo a caso prodotto da quella macchina.
- i. Qual è la probabilità che il pezzo sia difettoso?
- ii. Il pezzo scelto risulta effettivamente difettoso. Qual è la probbailità condizionata che la macchina che ha prodotto il pezzo sia quella inaffidabile?
- (c) Un tecnico è chiamato in una ditta per intervenire su una macchina che si sta rivelando inaffidabile. Infatti, produce 1 pezzo su 5 difettoso, mentre le altre 3 macchine identiche che si trovano in quella ditta producono solo 1 pezzo su 100 difettoso. il tecnico entra in ditta, sceglie una macchina a caso tra le 4 identiche, osserva un pezzo a caso prodotto da quella macchina e nota che è difettoso. Qual è la probabilità che abbia scelto una macchina inaffidabile?

12. Una fabbrica produce dei bulloni con una percentuale di pezzi difettosi del 2%. I bulloni vengono venduti in confezioni da 100 pezzi, e queste vengono sostituite se vi sono almeno 2 bulloni difettosi.
 - (a) Qual è una variabile aleatoria X appropriata per contare il numero di pezzi difettosi in una confezione?
 - (b) Qual è la probabilità di dover sostituire una data confezione?
 - (c) Approssimare il risultato precedente utilizzando una opportuna variabile di Poisson.
13. Sappiamo che in un negozio arrivano in media 14 clienti alla settimana.
 - (a) Si associ ai dati precedenti la v.a. di Poisson, P_0 , collegata con il numero di clienti che arrivano in 10 giorni. Descrivere esplicitamente tale legge; trovare la sua media.
 - (b) Calcolare, tramite la legge introdotta in i), la probabilità che in 10 giorni arrivino esattamente 20 clienti.
14. Supponiamo che un individuo sia allergico ad un farmaco con probabilità pari a 0,001.
 - i) Determinare la probabilità che su 2000 individui vi siano esattamente 3 individui allergici e la probabilità che ve ne siano almeno 3 allergici. (Scrivere solo le formule senza fare i calcoli)
 - ii) Approssimare il risultato precedente utilizzando una opportuna v.a. di Poisson.
15. (a) Un dado equilibrato viene lanciato 3 volte. Qual è la probabilità che il 6 sia uscito esattamente 2 volte?
 - (b) Qual è la probabilità che in n lanci il 6 sia uscito esattamente 2 volte?
16. La probabilità di vincere un premio nei concorsi di un supermercato è *molto bassa*, pari a 0.008. Una signora partecipa a 200 concorsi (indipendenti).
 - (a) Qual è la probabilità di vincere esattamente 5 premi?
 - (b) Approssimare la probabilità precedente usando una opportuna variabile *discreta*.
17. Un canale di comunicazione trasmette le cifre 0 e 1. Se la cifra trasmessa è 0, la cifra viene correttamente ricevuta con probabilità 0.99; se è stato trasmesso l'1 la cifra viene correttamente ricevuta con probabilità 0.95. L'80% di cifre trasmesse è 1.
 - (a) Si trasmette una cifra. Qual è la probabilità p di una errata ricezione della cifra trasmessa?
 - (b) Si trasmettono 30 cifre. Qual è la variabile aleatoria che conta il numero di errori su 30 cifre trasmesse? si calcoli la probabilità che su 30 cifre trasmesse si verifichino più di 2 errori (2 compreso).
 - (c) È ragionevole approssimare la probabilità calcolata in b) con una variabile di Poisson? Calcolare in tal caso la probabilità approssimata.

[In (b) e (c) esprimere i risultati con delle formule dove compare p trovato in (a)]

4 Variabili aleatorie continue

1. Il diametro interno medio delle guarnizioni prodotte da una macchina è 0,502 cm e la deviazione standard è di 0,005 cm. Per gli scopi per cui sono prodotte la tolleranza massima è tra 0,495 cm e 0,508 cm. In caso contrario sono difettose. Assumendo la legge normale si calcoli la percentuale di quelle per cui il diametro è maggiore di 0,510 cm.
2. L'errore accidentale nelle misurazioni di lunghezze effettuate con un calibro di precisione dipende dal tasso di umidità ambientale. Supponiamo che tale errore sia una v.a. normale di media 0 e varianza $(0.5)^2$ se l'ambiente è secco, una v.a. normale di media 0 e varianza $(0.25)^2$ se l'ambiente è umido. Si è constatato che le misure vengono effettuate in ambiente secco solo nel 20% dei casi.
 - (a) Qual è la probabilità che in una misurazione si abbia $|X| < 0.6$?
 - (b) sapendo che in una misurazione si è verificato che $|X| < 0.6$, qual è la probabilità che essa sia stata effettuata in ambiente umido?
3. Dei pezzi meccanici prodotti da una certa linea di produzione devono avere una lunghezza nominale di 20 cm; sono accettabili pezzi entro i limiti di tolleranza da 19.5 a 20.5 cm. Le lunghezze reali dei pezzi prodotti sono in realtà distribuite normalmente attorno ad una media di 20 cm, con una deviazione standard di 0.25 cm.

- (a) Quale percentuale dei pezzi prodotti non rispetta i limiti di tolleranza dati?
 - (b) Potendo ricalibrare la linea di produzione, a quale valore dobbiamo ridurre la deviazione standard se vogliamo che il 99% dei pezzi rispettino i limiti di tolleranza?
4. Sia X una variabile uniforme su $[0, 1]$. Determinare la funzione di distribuzione e la densità della v.a. $Y = e^X$.
5. Sia X una variabile aleatoria binomiale di parametri $(1000, p)$, dove $p \in [0, 1]$.
- (a) Determinare p sapendo che la distribuzione di X si approssima con quella di una variabile di Poisson di parametro 2;
 - (b) Approssimando ora la variabile X con una opportuna variabile normale, fornire un risultato approssimato di $P(X \leq 3)$. (esprimere il risultato tramite la funzione di distribuzione della normale standard sui positivi).
6. Una moneta dà Testa con probabilità $1/4$, Croce con probabilità $3/4$. Ad ogni lancio si vince 1 euro se esce Testa, si perde $1/2$ euro se esce Croce. Si effettuano 16 lanci della moneta. Determinare, utilizzando il Teorema del Limite Centrale, la probabilità che alla fine dei 16 giochi un giocatore intaschi almeno 1 euro.
7. Nel correggere gli esercizi di una prova scritta incerta, un docente dichiara erroneamente sufficiente una prova con probabilità $1/5$.
- (a) Se nel primo appello vi erano 37 prove incerte, qual è la probabilità che vengano ingiustamente promosse almeno 5 persone (5 incluso)?
 - (b) Approssimare il risultato precedente utilizzando prima una variabile di Poisson, poi una variabile normale.
8. Vi è una probabilità pari al 3% che una macchina fotografica ordinata via internet sia difettosa.
- (a) Determinare la probabilità che, su 1000 macchine fotografiche spedite ve ne siano al più 20 (≤ 20) difettose. Quale variabile aleatoria state considerando?
 - (b) Approssimare il risultato precedente attraverso un'altra variabile aleatoria *discreta*.
 - (c) Approssimare il risultato trovato in a) attraverso un'opportuna variabile aleatoria *continua*.
9. Il peso del bagaglio di un passeggero che fa il check-in all'aeroporto di Venezia è una variabile aleatoria di media 15 kg e varianza 4 Kg. In un volo per Parigi salgono a bordo 144 persone. Usando un'opportuna variabile aleatoria continua, dare un'approssimazione della probabilità che il peso dei loro bagagli superi 2130 kg.
10. Il numero di gol subiti dal Padova in una partita di campionato è una variabile aleatoria di media 1.25 e varianza 4. Dare una approssimazione della probabilità che nelle prossime 10 partite, la squadra biancoscudata subisca almeno 20 reti.
11. Il numero di chiamate ad un centralino in una data ora è una variabile di Poisson di media 250.
- (a) Qual è la probabilità che chiamino in quell'ora più di 260 persone?
 - (b) Approssimare la probabilità precedente utilizzando la variabile normale, motivandone la ragione. Esprimere il risultato tramite la funzione di distribuzione Φ sui reali positivi.
12. Un vecchio walkman funziona con una sola pila di tipo AAA non ricaricabile; si cambia la pila appena questa è scarica. Con una pila esso funziona con un tempo che è una variabile aleatoria continua T di densità

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{25}t, & t \in [0, 5] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (a) Determinare il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria T (**esprimere i risultati in frazioni a/b , con a e b espliciti**);
- (b) siano T_1 la durata della prima pila sostituita, T_2 la durata della seconda pila sostituita,..., T_m la durata dell' m -esima batteria sostituita,...; descrivere a parole l'evento $T_1 + \dots + T_{72} > 250$;

- (c) Approssimare la probabilità $P(T_1 + \dots + T_{72} > 250)$: semplificare le espressioni trovate ed esprimere il risultato con un numero esplicito. [Sarà utile uno dei seguenti valori della funzione di distribuzione della normale standard: $\Phi(0.7) = 0.7580$, $\Phi(0.8) = 0.7881$, $\Phi(0.9) = 0.8159$, $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(1.1) = 0.8643$].
13. Il 35% dell'elettorato è a favore di Pinco Pallino. In una sezione elettorale votano 200 persone (scelte a caso) e X è il numero di quelle che sono a suo favore.
- (a) Determinare la probabilità che $X \geq 75$;
- (b) Fornire il risultato approssimato utilizzando il teorema del limite centrale;
14. Sia F_X la funzione di distribuzione di una variabile aleatoria continua X , definita da
- $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 6x^4 - 8x^3 + 3x^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
- (a) Determinare la densità di X ;
- (b) Determinare il valore atteso di X .
15. Il numero di errori tipografici di ogni pagina di un libro è una variabile di media $1/2$ e varianza $1/9$. Supponiamo che il numero di errori in una pagina sia indipendente dal numero di errori presenti in ogni altra pagina. Il libro ha 400 pagine.
- (a) Determinare media e varianza della variabile che conta il numero complessivo di errori tipografici nel libro.
- (b) Fornire una formula approssimata per la probabilità che il libro contenga meno di 180 errori tipografici.

5 Congiunte e condizionate

5.1 Congiunte discrete

- (*) Sia X una variabile aleatoria di Poisson di parametro $Y - 1$, dove Y è una variabile normale di parametri $(\mu = 2, \sigma^2 = 9)$. Determinare il valore atteso di X .
- Abbiamo tre dadi, uno rosso, uno verde ed uno bianco. Il dado rosso ha le facce numerate da 1 a 6; in quello verde compaiono solo i numeri 1, 2, 3 ciascuno ripetuto due volte; in quello bianco compaiono solo i numeri 1, 2 ciascuno ripetuto tre volte. Lancio il dado rosso; se esce un numero pari lancio il dado verde, altrimenti quello bianco. Indico con X ed Y le variabili aleatorie che registrano rispettivamente l'esito del primo lancio e del secondo lancio dei dadi. Determinare la densità congiunta di X ed Y e calcolare $P(X \leq Y)$.
- Siano X_i , $i = 1, 2, 3$, variabili aleatorie di Bernoulli indipendenti di parametro $1/(i + 1)$. Si considerino le variabili discrete $X = X_1 + X_2$ e $Y = X_2 + X_3$.
 - Si calcoli la densità discreta di X .
 - Si calcoli la densità congiunta di (X, Y) in $(0, 2)$, $(1, 2)$ e in $(2, 2)$.
 - Usare (b) per determinare la densità discreta di Y in 2.
- Sia Ω uno spazio campionario e X, Y due variabili aleatorie su Ω che assumono rispettivamente i valori $\{7, 8, 16\}$ e $\{4, 2\}$. Sono conosciute le probabilità congiunte $p(a, b)$ cioè la probabilità che X assuma valore a e che Y assuma valore b .

$$p(7, 4) = 0.1; p(7, 2) = 0.1; p(8, 4) = 0.2; p(8, 2) = 0.3; p(16, 4) = 0.2; p(16, 2) = 0.1$$

- Calcolare le densità di X e Y , cioè le densità marginali.
- Le due variabili aleatorie sono indipendenti?
- Calcolare il valore atteso delle v.a. X e Y . Calcolare la loro covarianza.
- Si consideri la variabile aleatoria data dal prodotto XY , trovare i valori assunti. Tra i valori assunti vi è 32: calcolare $P(XY = 32)$.

5. Sia (X, Y) una variabile congiunta discreta la cui densità congiunta è data da

$$p(0, 0) = a, p(1, 0) = 0, p(0, 1) = 0, p(1, 1) = bp(0, 2) = c, p(1, 2) = 0$$

ove a, b, c sono numeri reali non nulli.

- (a) A quale ulteriori condizioni devono soddisfare i parametri a, b, c affinché quella data sia effettivamente una densità congiunta? Calcolare le densità marginali e i valori attesi di X e di Y .
 - (b) Mostrare che X e Y non sono indipendenti.
 - (c) Dare una condizione necessaria e sufficiente affinché X e Y non siano correlate (cioè $Cov(X, Y) = 0$).
6. Siano X, Y due variabili aleatorie indipendenti con legge uniforme su $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; si può pensare a due lanci indipendenti di un dado regolare. poniamo $M = \max\{X, Y\}$.
- (a) Determinare $P(M = j | X = i)$ per i valori di i e j per i quali tale probabilità non è nulla (conviene distinguere i casi $i = j$ e $i \neq j$);
 - (b) dedurre dal punto precedente la densità discreta di M .
7. (*) Ogni cliente che arriva al supermercato ha una probabilità p di effettuare almeno un acquisto, indipendentemente dagli altri clienti. Siano N il numero di clienti che arrivano al supermercato in una giornata, X il numero di clienti che fanno acquisti.
- (a) Determinare la densità discreta condizionata di X dato $N = n$; quale variabile discreta ha la stessa densità?
 - (b) Dedurre cos'è $E[X|N]$ (quale numero se si tratta di un numero oppure quale v.a. se si tratta di una v.a.) ?
Si supponga che N sia una variabile di Poisson di parametro λ .
 - (c) Verificare che

$$P(X = k, Y = m) = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!}.$$

- (d) Determinare la legge marginale di X .
8. (*) Un tecnico collauda certi pezzi con uno strumento che è in grado di identificarne uno difettoso con probabilità $p = 90\%$. Egli prende $N = 50$ pezzi difettosi e sottopone ciascuno di essi a un primo collaudo; poi prende quelli che, pur difettosi, hanno superato il primo test e li sottopone a un secondo collaudo.
- (a) Riconoscere la distribuzione della v.a. X che conta quanti dei 50 pezzi iniziali non hanno superato il primo collaudo (cioè sono stati identificati come difettosi).
 - (b) detta Y la v.a. che conta quanti dei pezzi sottoposti al secondo collaudo non lo superano, determinare la densità condizionata di Y dato $X = k$, per $k = 0, \dots, 50$. Qual'è una variabile aleatoria che ammette tale densità? Dedurre il valore di $E[Y|X = k]$.
 - (c) Usare il punto precedente per determinare $E[Y]$;
 - (d) Determinare la probabilità che tutti i pezzi iniziali non superino i due collaudi, cioè $P[X + Y = 50]$ (suggerimento. condizionare rispetto a $X \dots$).
9. (*) Si partecipa ad un gioco che consiste nell'estrarre a caso un numero da 1 a 36. Se il numero estratto è divisibile per 3 si guadagnano k euro, dove k è il numero di macchine che attraversano un determinato incrocio nel prossimo minuto; altrimenti si rimette il numero nell'urna, se ne estrae un'altro a caso e si perdono tanti euro qual è il numero estratto. Le auto che passano all'incrocio considerato soddisfano ad una legge di Poisson di media 50 al minuto. Determinare il valore atteso della vincita. (sarà utile la formula $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$).
10. (*) Si lancia un dado: se viene 1 o 2 si vincono tanti euro quante sono le email di tipo spam ricevute nell'ora successiva (il loro numero è una variabile di Poisson di parametro 10 all'ora); se viene 3, 4, 5 o 6 si effettuano 20 lanci di una moneta che dà testa con probabilità $2/5$ e si perdono tanti soldi quante sono le teste uscite. Determinare il valore atteso della vincita (con segno: + se si vince, - se si perde)

11. Siano X, Y due variabili discrete con legge congiunta

$$p(0, 0) = 1/7, \quad p(0, 1) = 3/7, \quad p(1, 0) = 2/7, \quad p(1, 1) = 1/7.$$

Si dica se X, Y sono indipendenti motivando la risposta.

12. (*) Si tira più volte un dado equilibrato. Si tira il dado finché non escono *sia* il 5 che il 6. Sia N la variabile aleatoria uguale al numero di tiri da fare. Indichiamo poi con X_1 la variabile uguale all'esito del primo lancio.
- (a) Determinare $E[N|X_1 = k]$ per $k = 1, 2, 3, 4$ (esprimere il risultato in termini di $E[N]$);
 - (b) Determinare $E[N|X_1 = 5]$ e $E[N|X_1 = 6]$;
 - (c) Dedurre da (a) e (b) il valore di $E[N]$, motivando la risposta.
13. (*) Sia Y una variabile aleatoria esponenziale di parametro 5. Determinare il valore atteso della variabile aleatoria binomiale di parametri $(Y, 1/5)$.
14. (*) Ho un dado ed una moneta che lanciata dà testa con probabilità $1/3$. Lancio il dado; se esce un numero ≥ 5 , vinco tanti euro quante sono le volte che esce testa lanciando 20 volte la moneta; se esce un numero ≤ 4 , perdo tanti euro quante sono le volte che devo lanciare la moneta per ottenere testa. Calcolare il valore atteso del guadagno.

5.2 Congiunte continue

1. Siano X e Y due variabili indipendenti e uniformi su $[0, 1]$. Calcolare

$$P(XY > 1/2)$$

2. Sia (X, Y) una variabile congiunta continua uniforme sul quadrato di vertici $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ (cioè la cui densità è costante sul quadrato).
- (a) Determinare la densità di (X, Y) ;
 - (b) calcolare le densità marginali;
 - (c) (*) Calcolare $P(Y > 1/2 | X < 1/2)$;
 - (d) (*) Determinare la densità di $(X + Y, X - Y)$.
3. Data la v.a. (X, Y) continua con densità

$$f(x, y) = x + y \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1$$

determinare la funzione di distribuzione e la densità della v.a. $Z = Y/X$.

4. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} Kxy & \text{se } 0 < x < 1 - y < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (a) Determinare la costante K in modo che $f(x, y)$ sia la densità congiunta di una v.a. congiunta continua (X, Y) ;
 - (b) calcolare le densità marginali di X e di Y ;
 - (c) (*) Calcolare il valore atteso condizionato $E[X|Y = y]$.
5. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} 5ye^{-y(x+5)} & \text{se } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la densità congiunta di una variabile congiunta continua (X, Y) .

- (a) Determinare la densità marginale di Y ;
 - (b) (*) Determinare la densità condizionata di X dato $Y = y$.
6. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} x(y - x)e^{-y} & \text{se } 0 < x < y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la densità congiunta di una variabile congiunta continua (X, Y) .

- (a) Determinare le densità marginali di X e di Y ;
- (b) (*) Determinare la densità condizionata di Y dato $X = x$;

(c) (*) Determinare $E[Y|X = x]$.

7. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{se } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la densità congiunta di una variabile congiunta continua (X, Y) .

(a) Calcolare la covarianza di (X, Y) ;

(b) (*) Determinare la densità condizionata di X dato $Y = y$.

8. Si consideri la funzione

$$f_c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_c(x, y) = \begin{cases} c & \text{se } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare per quale valore di c la funzione f_c è una densità congiunta continua. Per tale valore calcolare le densità marginali di X e Y . (*) Calcolare il valore atteso condizionato $E[X|Y = 1/2]$.

9. Supponiamo che la densità congiunta di due v.a. X ed Y sia

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{se } x, y > 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Determinare la densità marginale di X e di Y ;

(b) (*) calcolare $E[X|Y = 2]$;

(c) determinare $P(X + Y \leq 4)$.