PARAMETRIZZAZIONI

$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^n \\ {[c,d]} \arrow[u, "\varphi \text{ continua}"] \arrow[ur, bend right] & \end{tikzcd}$$

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, curva.

$f \circ \varphi : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è curva.

ESEMPIO. $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $\quad t \in [2\pi, 4\pi]$

$\varphi(u) = e^u \qquad u \in [\lg(2\pi), \lg(4\pi)]$

Otteniamo la curva $u \longmapsto f(\varphi(u))$
$$= (\cos(e^u), \sin(e^u))$$

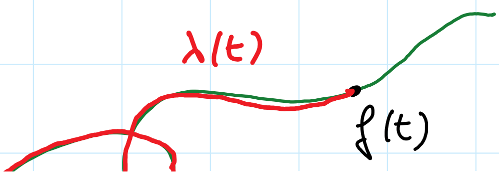
PROP. Se φ è continua e biiettiva $\Rightarrow$
lunghezza di f = lungh di $(f\circ\varphi)$

Es. Verificarlo se φ è $\mathcal{C}^1$, f è $\mathcal{C}^1$, $\varphi' \neq 0$.
[Sugg: $\text{Lungh}(f\circ\varphi) = \int_c^d \|\underbrace{(f\circ\varphi)'}_{\text{sviluppare e fare un camb. di variabili.}}(u)\|\,du$]

PARAMETRIZZ. CON LA LUNGHEZZA D'ARCO.

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1$, $f' \neq 0$.
La lunghezza della curva f su $[a, t]$ $\quad t \leq b$
è

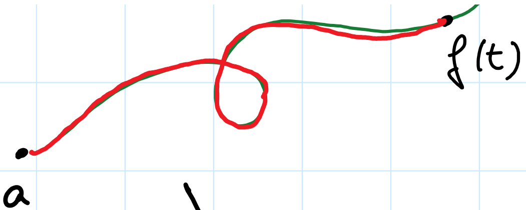
$$\lambda(t) := \int_a^t \|f'(u)\|\,du$$



- λ è strett. crescente

• λ è strett. crescente

• λ è derivabile

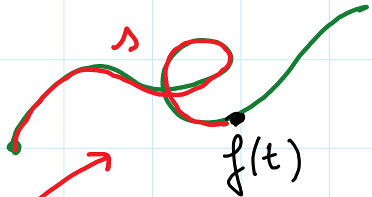


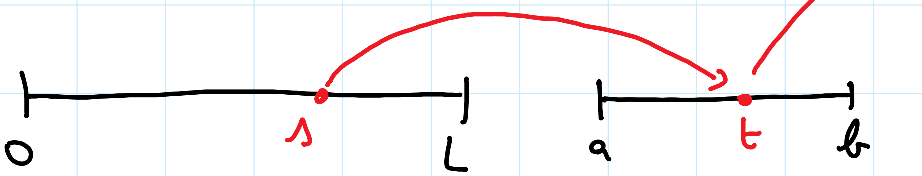
$\Rightarrow$ λ è una biiezione tra $[a,b] \underset{\varphi}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [0,L]$, dove

$$L = \int_a^b \|f'(u)\|\,du = \text{lunghezza di } f$$

Sia $\varphi : [0,L] \longrightarrow [a,b]$ l'inversa di λ: φ è biiettiva $\Rightarrow$ $\text{lungh}(f) = \text{lung}(f \circ \varphi)$

$$\underset{[0,L]}{\overset{\Uparrow}{s}} \longmapsto \varphi(s) \in [a,b] \longrightarrow f(\varphi(s))$$





$(f \circ \varphi)(s)$ si chiama "parametrizzazione di f con la lunghezza d'arco".

ESEMPIO. $(R\cos t, R\sin t) = f(t)$: $t \in [0, 2\pi]$.

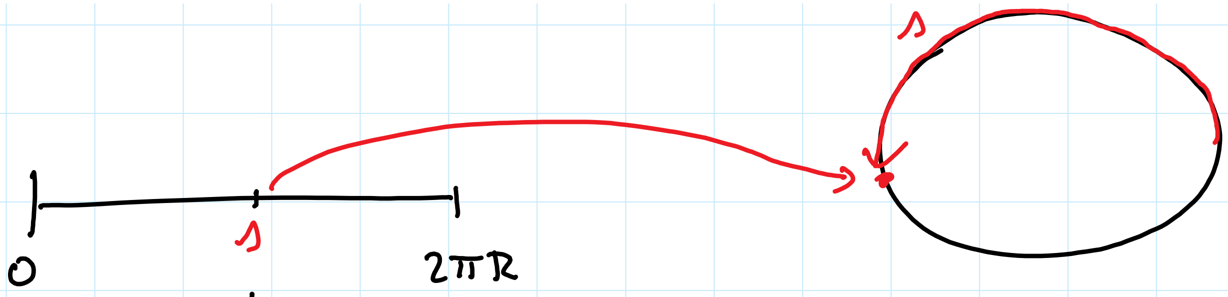
Parametrizzare f con la lunghezza d'arco

$$\underset{t \in [0,\pi]}{s = \lambda(t)} = \int_0^t \|f'(u)\|\,du = \int_0^t R\,du = \underset{[0,2\pi R]}{\overset{\Uparrow}{Rt}}$$

Poniamo $s = Rt$ cioè $t = \frac{s}{R}$

La par. di f con la lunghezza d'arco è

$$\left(R\cos\frac{s}{R}, R\sin\frac{s}{R}\right) : s \in [0, 2\pi R]$$



$$s(t) = \int_a^t \|f'(u)\| du$$ [Regola Mnemonica].

$$s'(t) = \|f'(t)\|$$: si scrive $\boxed{ds = \|f'(t)\| dt}$ (regola mnemonica).

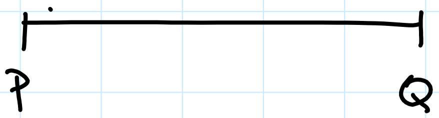
ESEMPIO (grafico di una funzione).

Sia $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione.
Associamo ad essa la curva $f(x) = (x, g(x))$ il cui sostegno è proprio il grafico di g.
Se $\mu :$ Grafico di $g \longrightarrow \mathbb{R}$, si ha

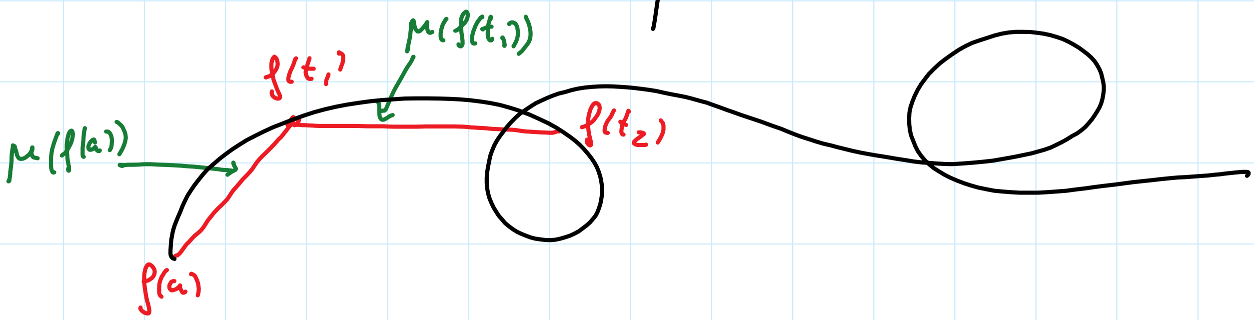
$$\int_f \mu(x,y)\, ds = \int_a^b \mu(x, g(x)) \sqrt{1 + g'^2(x)}\, dx$$

INTEGRALI CURVILINEI in ds

Motivazione: segmento di densità $\mu > 0$



la sua massa è $\mu \times \|\vec{PQ}\|$.



Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e

$\mu : f([a,b]) \xrightarrow[\text{continua}]{} \mathbb{R}$ (immaginiamo sia una densità).

Il "peso" della poligonale associata alla suddivisione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = b$ è

$$\mu(f(a))\,\underbrace{\|f(t_1) - f(a)\|}_{\approx\ \|f'(a)(t_1-a)\|} + \dots + \mu(f(t_n))\,\underbrace{\|f(b) - f(t_n)\|}_{\approx\ \|f'(t_n)\|(b-t_n)}$$

se le ampiezze degli intervalli sono suff. piccole.

$$\text{Peso} \approx \mu(f(a))\,\|f'(a)\|\,(t_1 - a) + \dots + \mu(f(t_n))\,\|f'(t_n)\|\,(b - t_n)$$

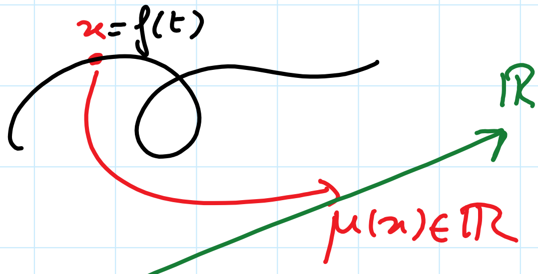
Si tratta di una somma di Riemann della

funzione $\mu(f(t))\|f'(t)\|$.

Al tendere a 0 delle ampiezze della suddivisione tali somme convergono a $\boxed{\int_a^b \mu(f(t))\|f'(t)\|dt}$

DEF. Sia $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^n$ curva $\mathcal{C}^1$

$\mu: \underbrace{f([a,b])}_{\text{sostegno}} \longrightarrow \mathbb{R}$ "continua"



L'integrale di μ sulla curva f, indicato con

$$\int_f \mu|df| \quad \text{o} \quad \int_f \mu\, ds$$

NOTAZIONI "è un integrale in ds"

è

$$\boxed{\int_a^b \mu(f(t))\underbrace{\|f'(t)\|dt}_{\text{"}ds\text{"}}.}$$

ESEMPIO. Cosa significa $\int_f x^5 \sin y\, ds$, se

$f(t)=(\cos t, e^{t^2})$, $t\in[0,1]$.

Ricordiamo: $\int_f \mu(x,y)\,ds := \int_a^b \mu(f(t))\|f'(t)\|dt$

(in $\mathbb{R}^2$) $= \int_a^b \mu(f_1(t), f_2(t))\sqrt{f_1'^2(t)+f_2'^2(t)}\,dt$

Nel nostro caso:

$$\int_0^1 (\cos t)^5 \sin(e^{t^2})\,\|f'(t)\|\,dt$$

$$\int_0 (\cos t)\,\sin(e^{t^2})\,\|f'(t)\|\,dt$$

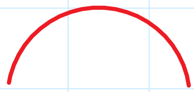
$$f'(t) = (-\sin t,\ 2te^{t^2}) \qquad \|f'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + 4t^2 e^{2t^2}}$$

ESERCIZIO. Filo $f(t) = (R\cos t,\ R\sin t)$ $t \in [0,\pi]$

Densità

$\mu(x,y) = x^2 y$

Massa dell'arco di cerchio?



$$\text{MASSA} = \int_f x^2 y\,ds = \int_0^\pi (R\cos t)^2 (R\sin t)\underbrace{\|f'(t)\|}_{R}\,dt$$

$$= \int_0^\pi R^4 \cos^2 t \sin t\,dt = R^4 \int_0^\pi \cos^2 t \sin t\,dt$$

$$= R^4 \int_0^\pi \frac{d}{dt}\left(-\frac{\cos^3 t}{3}\right) dt = R^4 \left[-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_{t=0}^{t=\pi}$$

$$= R^4 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] = \frac{2R^4}{3}$$

BARICENTRO di una CURVA.

Baricentro di un sistema di punti $\{x_1, .., x_n\}$ in $\mathbb{R}$:

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Curva $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Possiamo calcolare

$\int_f x_1\,ds$, $\int_f x_2\,ds$ ... Poniamo $\int_f x\,ds := \left(\int_f x_1\,ds, \dots, \int_f x_n\,ds\right)$

$$\int_a^b f_1(t)\|f'(t)\|\,dt, \dots$$

DEF. Il baricentro della curva γ è

$$\boxed{\frac{1}{\text{Lungh.}\gamma} \int_\gamma x \, ds}$$

$$= \frac{1}{\text{Lungh}\gamma} \left(\int_\gamma x_1 \, ds, \ldots, \int_\gamma x_n \, ds \right).$$

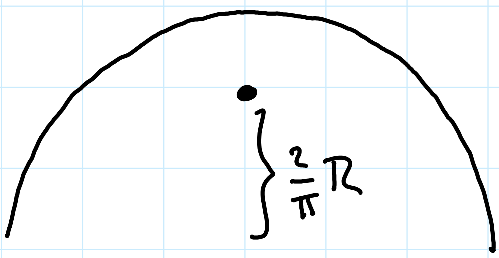
ESEMPIO. Semicerchio $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t) = (x_1(t), x_2(t))$ $t \in [0,\pi]$.

$$\int_\gamma x_1 \, ds = \int_0^\pi (R\cos t) \|\gamma'(t)\| \, dt = R^2 \int_0^\pi \cos t \, dt = 0$$

$$\int_\gamma x_2 \, ds = \int_0^\pi (R\sin t) \|\gamma'(t)\| \, dt = R^2 \int_0^\pi \sin t \, dt$$

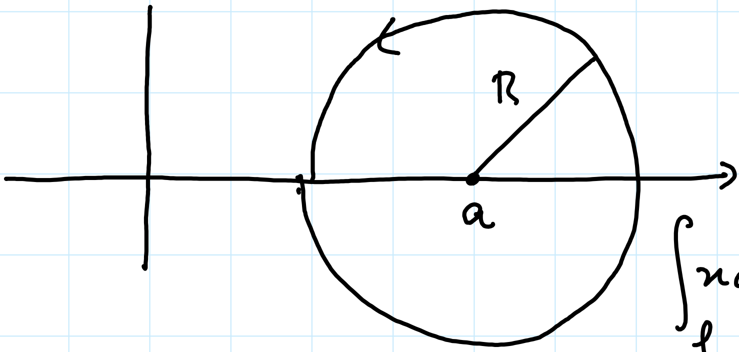
$$= R^2 [-\cos t]_0^\pi = 2R^2$$

Baricentro: $\frac{1}{\text{Lung}(\gamma)} (0, 2R^2) = \frac{1}{\pi R} (0, 2R^2) = (0, \frac{2}{\pi} R)$



OSS. $\bar{x} = \frac{1}{\text{Lungh}} \int_\gamma x \, ds \Rightarrow \int_\gamma x \, ds = \text{Lungh}(\gamma) \times \bar{x}$

Es.



$\bar{x} = (a, 0)$

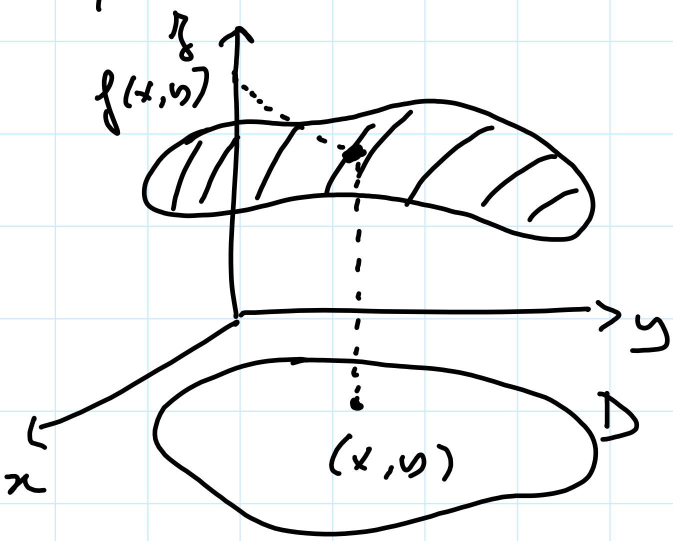
$$\int_\gamma x \, ds = 2\pi R \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a\pi R \\ 0 \end{pmatrix}.$$

OSS. $\displaystyle\int_\gamma 1 \, ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$ = lunghezza di γ.

FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$$

Grafico di $f = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in D\}$.



ESEMPIO. Funzioni radiali: sono funzioni del tipo $f(x) = h(\|x\|)$ dove h è definita su $[0,+\infty[$ (o un suo sottoinsieme).

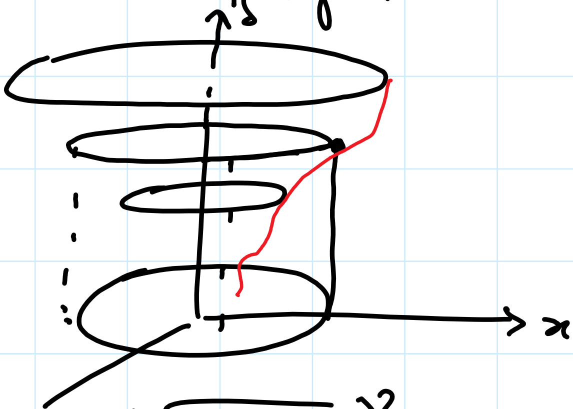
Es: $h(t) = e^{t^2}$ $\quad f(x_1,x_2) = e^{x_1^2+x_2^2}$

$h(t) = \lg|t| \rightsquigarrow f(x_1,x_2) = \lg\sqrt{x_1^2+x_2^2}$

Il grafico di una funzione radiale si ottiene ruotando il grafico della funzione nel piano xz (o un qualunque semipiano verticale)
$x \geq 0$

attorno all'asse z: infatti tale funzione assume un valore costante su ogni cerchio:

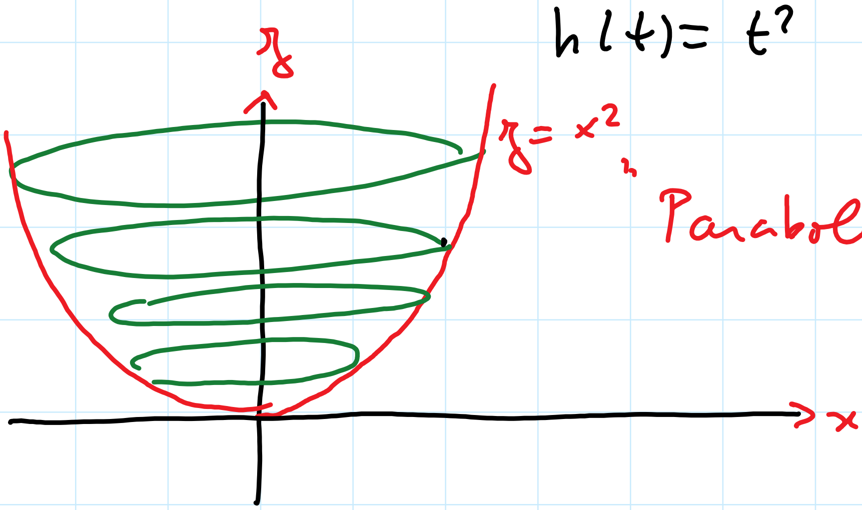
$\|x\| = R \Rightarrow f(x) = h(R)$



ESEMPIO: $f(x,y) = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$

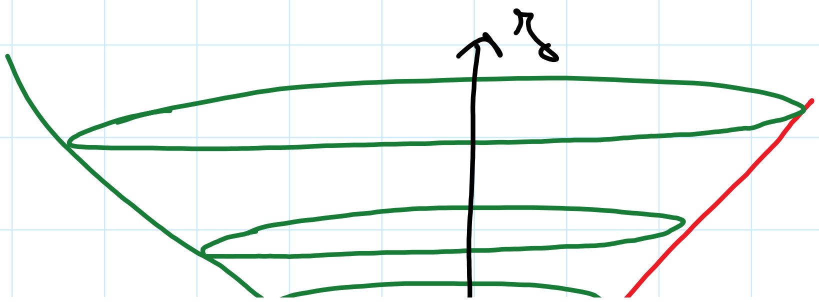
$t^2 \qquad t = \sqrt{x^2+y^2}$

$h(t) = t^2$

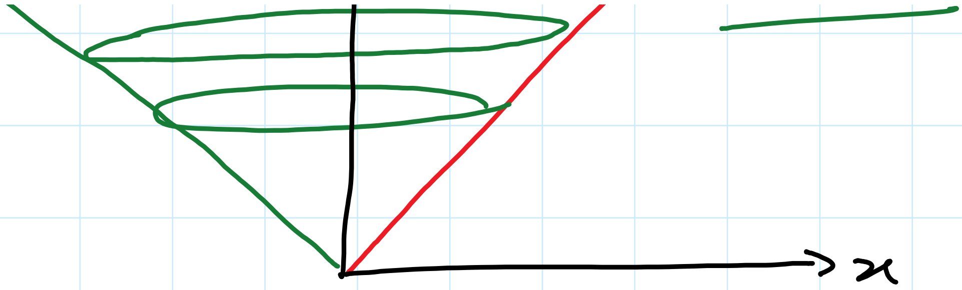


"Paraboloide ellittico"

ES. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \qquad h(t) = t$



CONO

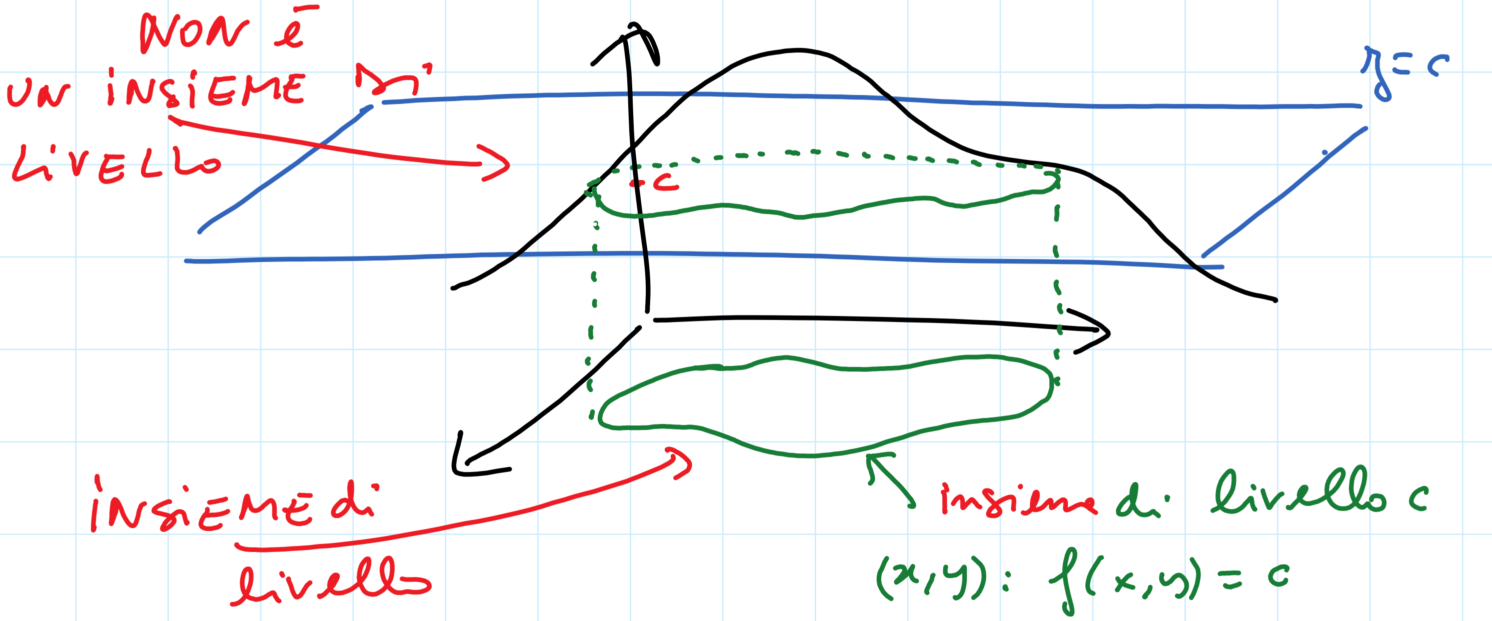


DEF. Insieme di livello di una funzione.

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

L'insieme di livello $c \in \mathbb{R}$ di f è l'insieme

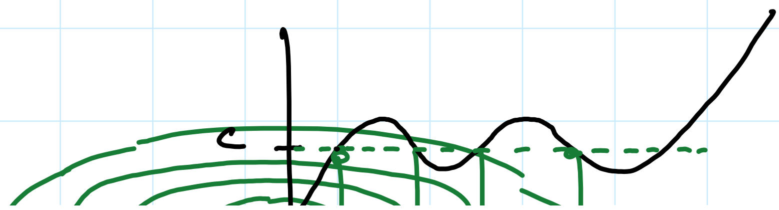
$$\{x \in D : f(x) = c\} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$$

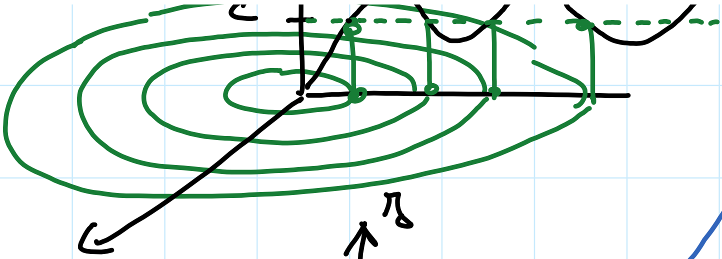


OSS: Le curve di livello di una funzione radiale sono unioni di cerchi

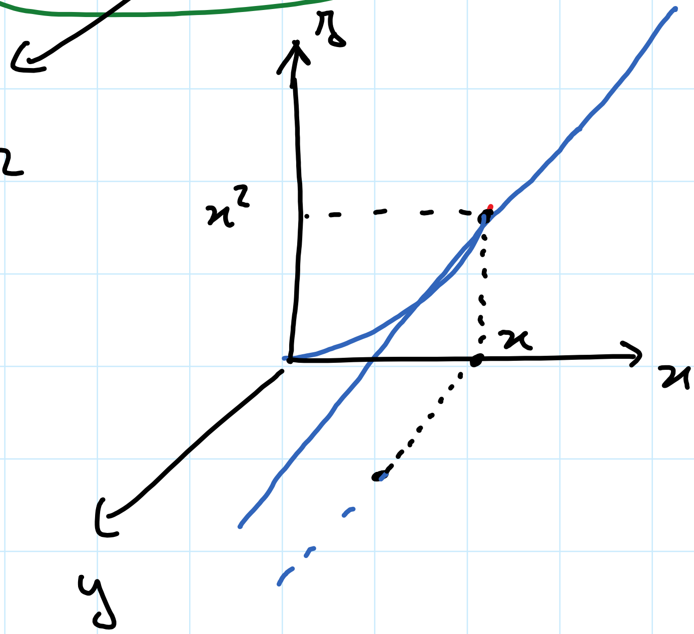
$f(x) = h(\|x\|)$ $\qquad f(x) = c \iff h(\|x\|) = c$

$\iff \|x\| = t \quad \forall t : h(t) = c$





ES. $f(x,y)=x^2$

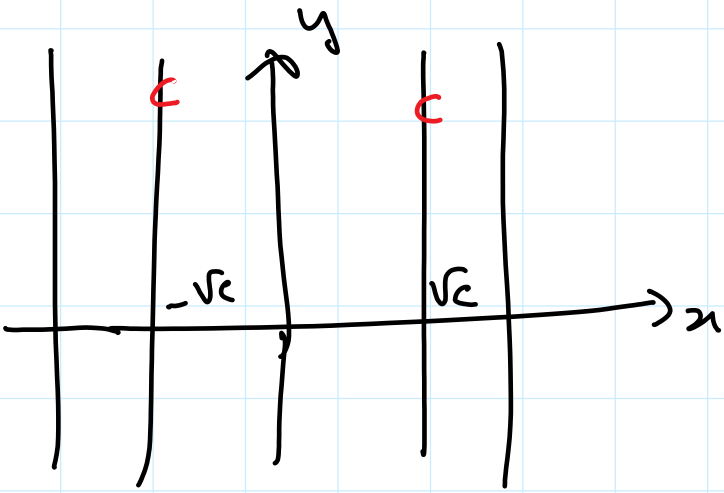


Insieme di livello c: $(x,y):\ x^2=c$

$c<0$: $\emptyset$

$c\geq 0$: $x=\pm\sqrt{c}$

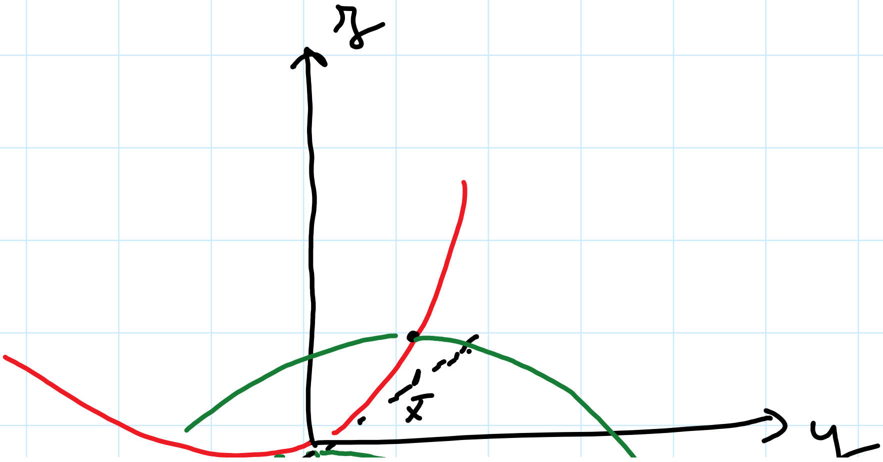
cilindro parabolico.



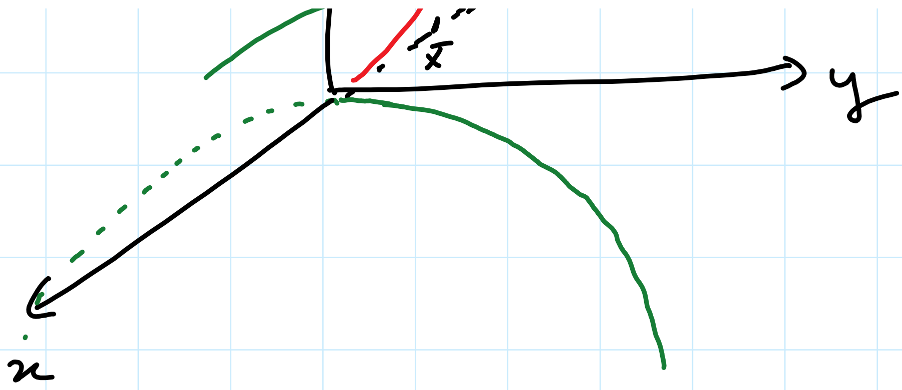
ESEMPIO: $f(x,y)=x^2-y^2$

Su $x=0$:
$f(0,y)=-y^2$

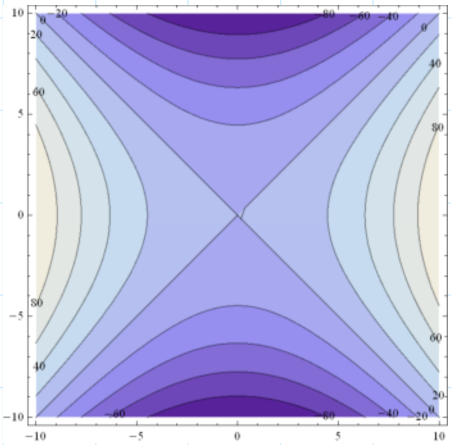
Su $y=0$:
$f(x,0)=x^2$

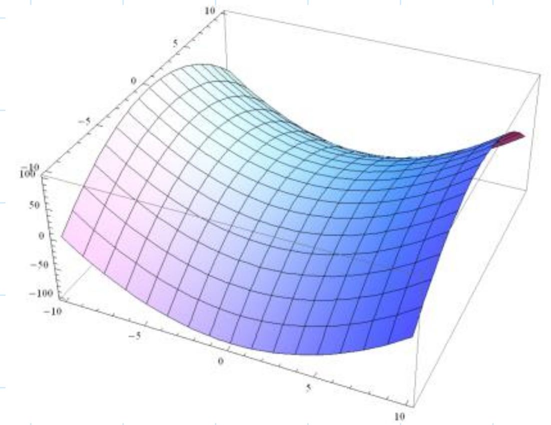


$f(x,0) = x^2$

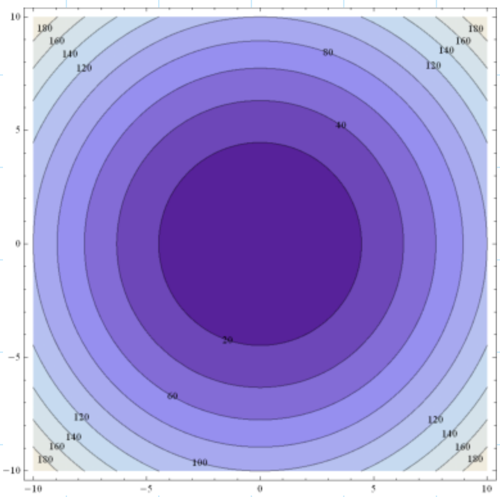


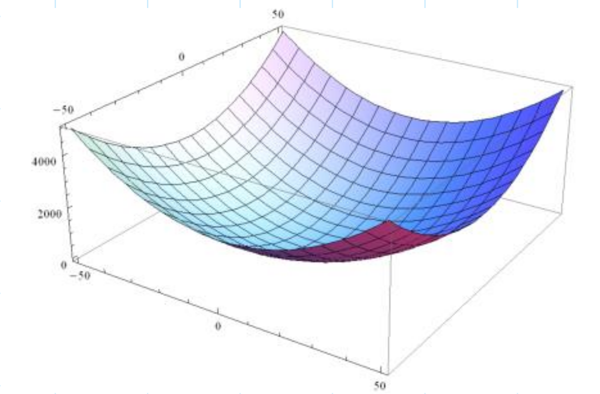
Fissato $\bar{x}$: $\quad f(\bar{x}, y) = \bar{x}^2 - y^2$



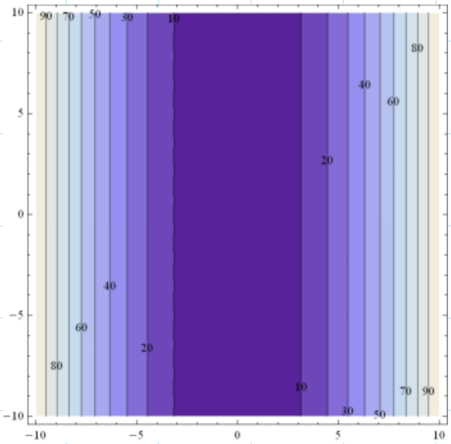


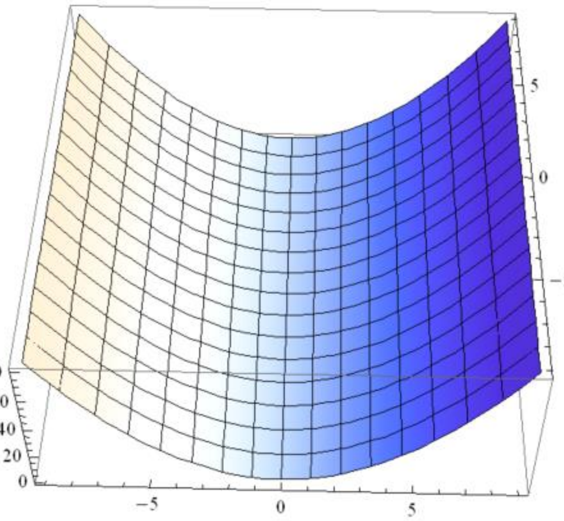
$z = x^2 - y^2$: paraboloide iperbolico





$z = x^2 + y^2$. (paraboloide ellittico)





$z = x^2$: cilindro parabolico