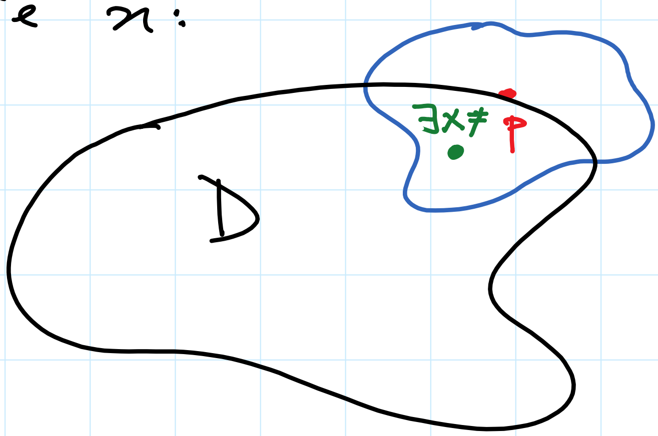
LIMITI di funzioni di più variabili.

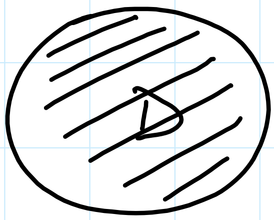
DEF. $D \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad p \in \mathbb{R}^n$ (NON NECESSARIAMENTE in D)

Si dice che p è di accumulazione per D se $\forall U$ intorno di p esiste x:

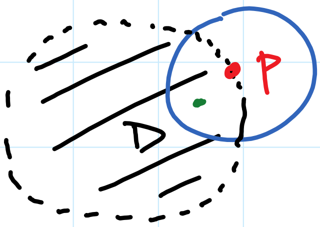
$$\begin{cases} x \neq p \\ x \in D \\ x \in U \end{cases}$$



ESEMPIO.



p non è di acc. per D



p è di accumulazione per D.

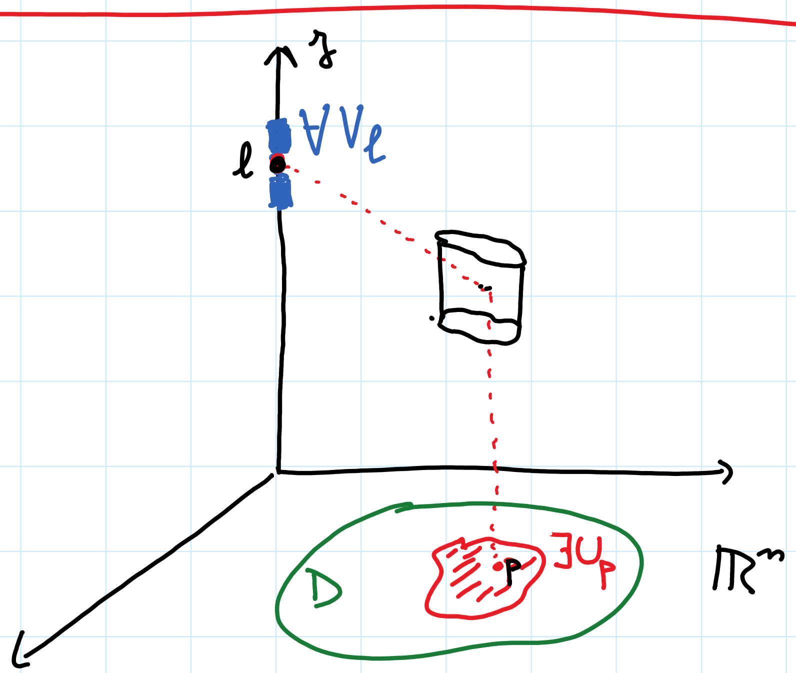
DEF (limite). $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

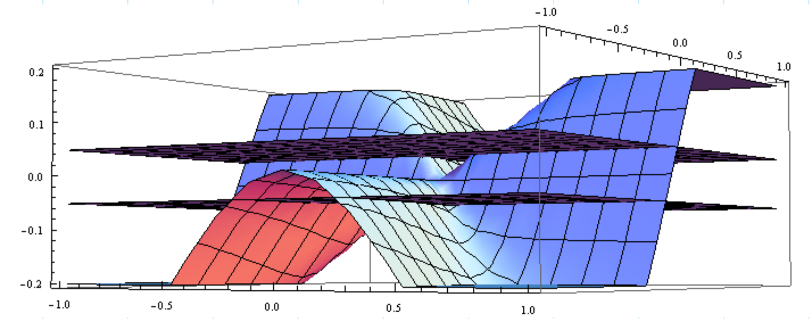
$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

p di accumulazione per D

$$\lim_{\substack{x\to p\\ x\in D}} f(x) = \ell \quad \text{se}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall V_\ell \text{ intorno di } \ell \quad \exists U_p \text{ int. di } p: \\ \qquad x\in U_p\cap D\setminus\{p\} \Longrightarrow f(x)\in V_\ell\end{array}}$$





Precisazione: se $\ell = +\infty$ ($-\infty$) un intorno di ℓ è un insieme che contiene una semiretta $[M, +\infty[$

risp. $]-\infty, M]$

Riscriviamo equivalente

- $l \in \mathbb{R}$:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < \|x - p\| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

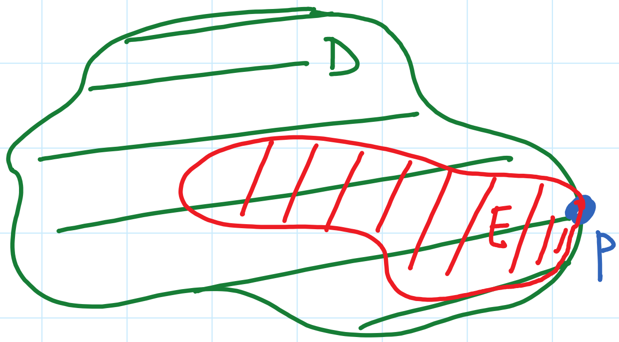
$x \in D$

- $l = +\infty$

$\forall M \quad \exists \delta \ldots \quad \Rightarrow f(x) > M$

- $l = -\infty$ $\quad \Rightarrow f(x) < M$

LIMITI SU RESTRIZIONI



PROP. $\lim_{\substack{x \to p \\ x \in D}} f(x) = l$. Sia $E \subseteq D$, e p di accumulazione per E. Allora $\lim_{\substack{x \to p \\ x \in E}} f(x) = l$.

Dim. $\lim_{\substack{x \to p \\ x \in D}} f(x) = l$: $\forall V_l \; \exists U_p$:

$x \in U_p \cap D \setminus \{p\} \Rightarrow f(x) \in V_l$.

Quindi se $x \in U_p \cap E \setminus \{p\} \Rightarrow x \in U_p \cap D \setminus \{p\} \Rightarrow f(x) \in V_l$ #

ES. $f(x, y) \equiv c$ in $\mathbb{R}^2$

$p \in \mathbb{R}^2$ $\quad \lim_{(x,y) \to p} f(x, y) = c$

Verificare con la def di limite

ES. $f(x, y) = x$ $\quad \Big|^{?} \; \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

ES. $f(x,y) = x$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = x_0$$

VERIFICA con la definizione.

? $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

$\|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow$

$\underset{f(x,y)}{\underset{\parallel}{|x - x_0|}} < \varepsilon$?

$$\|(x,y) - (x_0,y_0)\| = \|(x-x_0, y-y_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

Qui: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \geq (x-x_0)^2 \Rightarrow \|(x,y) - (x_0,y_0)\| \geq |x - x_0|$

Basta scegliere $\delta = \varepsilon$.

DEF. $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $p \in D$ se

p non è di acc. per D (p è isolato)

oppure $\lim_{\substack{x\to p \\ x \in D}} f(x) = f(p)$.

Regole identiche alle regole in $\mathbb{R}$. In particolare somme/quozienti/prodotti/composte di continue sono continue.

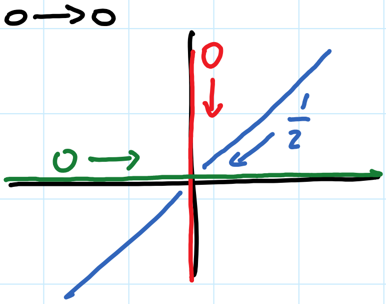
ESEMPIO. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{in } (0,0). \end{cases}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

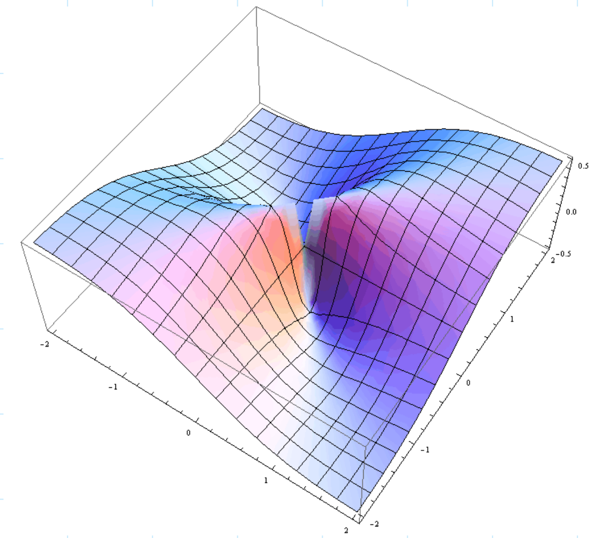
- Sulla retta $x=0$ $\quad f(0,y) = 0 \xrightarrow[y\to 0]{} 0$
- $y=0$: $f(x,0) = 0 \to 0$

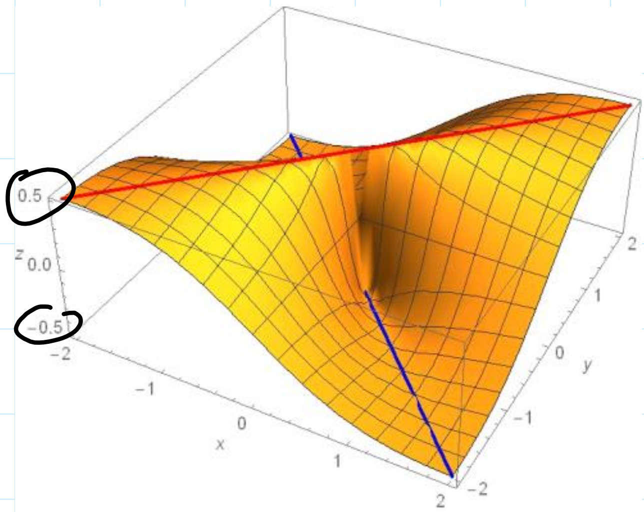
Sulla retta $y=x$:

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$$



Il limite è diverso su due rette distinte $\Rightarrow$ il limite di f in $(0,0)$ NON esiste.





Un criterio di esistenza del limite.

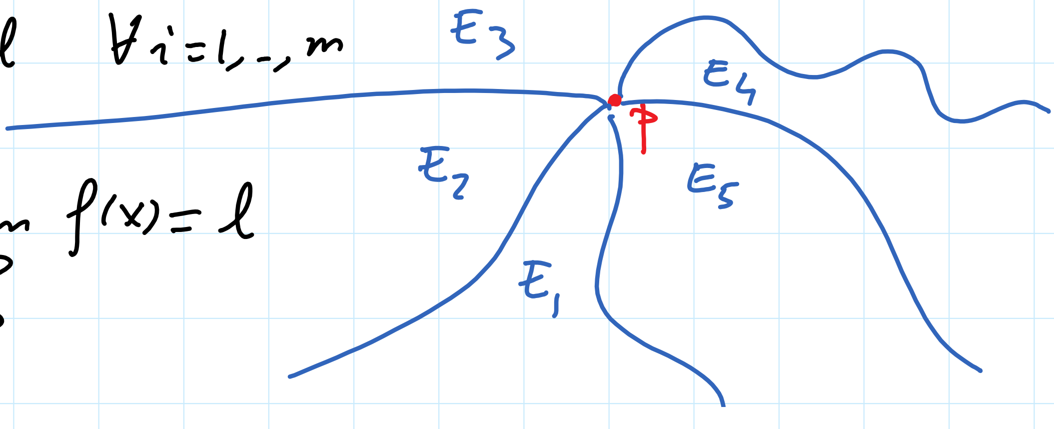
$D \subseteq \mathbb{R}^n \qquad E_1, \dots, E_m \subseteq D \qquad E_1 \cup \dots \cup E_m = D$

p di accumulazione per $E_1, \dots, E_m$.

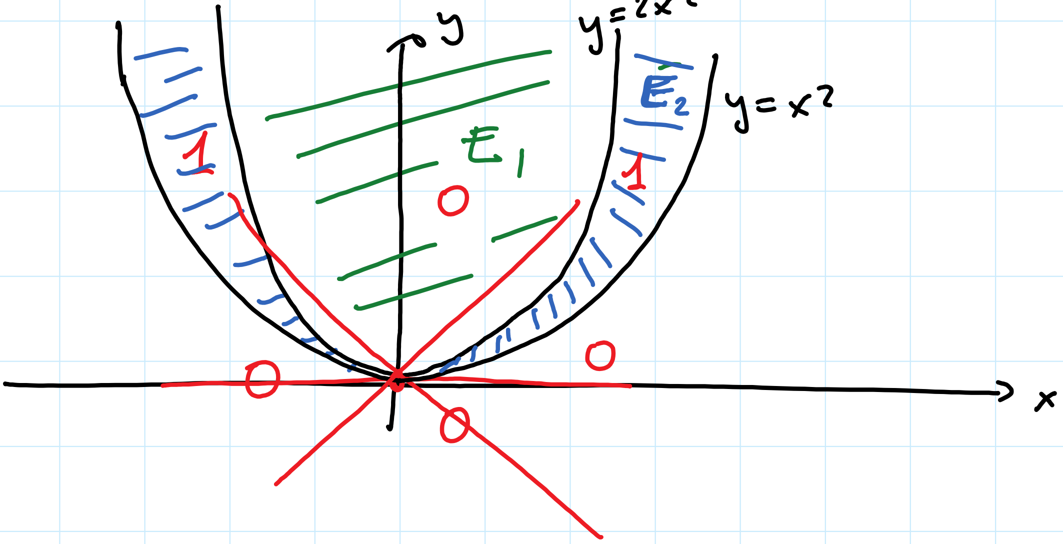
$\exists\, \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$:

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in E_i}} f(x) = \ell \qquad \forall i = 1, \dots, m$$

Allora $$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in D}} f(x) = \ell$$

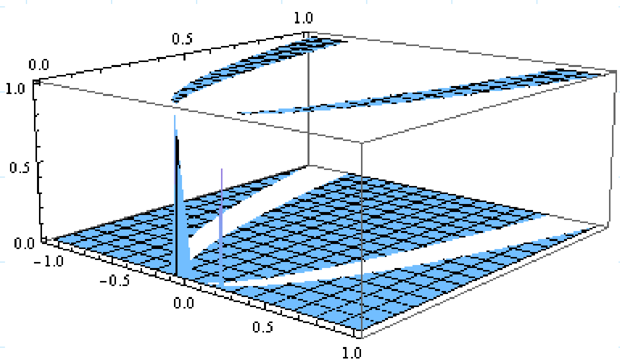


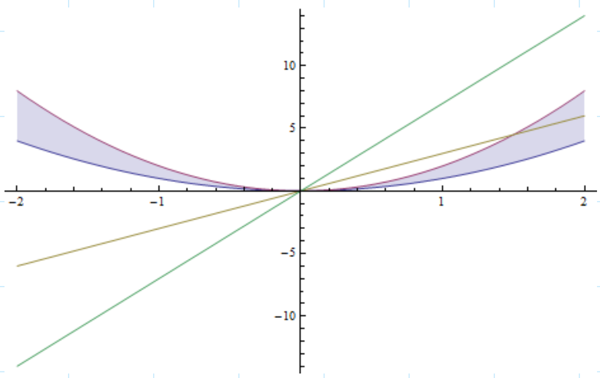
ES. $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x^2 \le y \le 2x^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$



Su E_1:

Su E_2:





OSS: In tal caso il limite è 0 su ogni retta per l'origine ma il limite di f NON ESISTE!

Alcune tecniche di calcolo dei limiti.

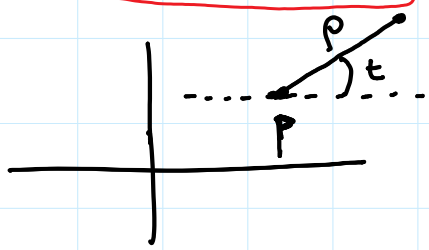
1) Th. dei carabinieri:

$$|f(x)-\ell| \le h(x) \qquad \lim_{x\to p} h(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to p} f(x) = \ell .$$

2) Passaggio in coordinate polari $(n=2)$.

$p=(p_1,p_2)$. Si pone $\boxed{\begin{cases} x = p_1+\rho\cos t \\ y = p_2+\rho\sin t \end{cases}}$ $\rho>0$, $t\in[0,2\pi]$

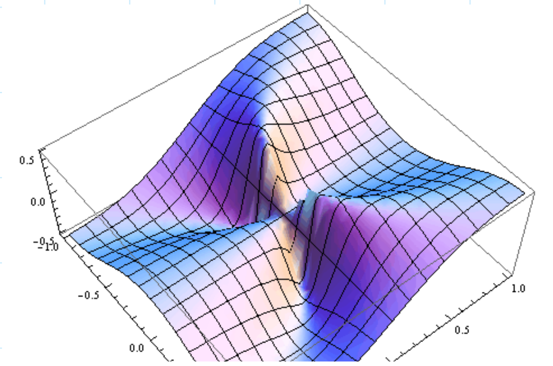


$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$f(\rho\cos t, \rho\sin t) = \frac{\rho^2\cos t\sin t}{\rho^2\cos^2 t+\rho^2\sin^2 t} = \cos t\sin t .$$

$\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos t, \rho\sin t) = \cos t\sin t$ dipende da t: il limite non esiste.

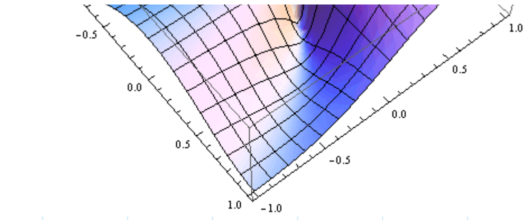
ESEMPIO. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$



$$f(\rho\cos t, \rho\sin t) = \frac{\rho^3\cos^2 t\sin t}{\rho^4\cos^4 t+\rho^2\sin^2 t}$$

$$= \rho\,\frac{\cos^2 t\sin t}{\rho^2\cos^4 t+\sin^2 t}$$

Fissato t



Fissato t

$\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos t, \rho\sin t) = 0$

Ciò equivale al fatto che $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in \text{retta per l'origine}}} f(x,y) = 0$.

Su $y=x^2$ $\quad f(x,y) = \dfrac{x^4}{2x^4} = \dfrac{1}{2} \to \dfrac{1}{2}$ quindi il

limite di f in $(0,0)$ non esiste.

COME PROVARE l'esistenza di un dato limite

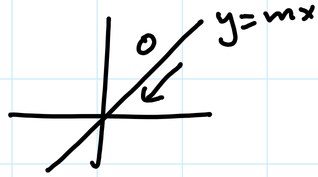
Metodo 1: Th. dei carabinieri:

Se $|f(x) - \ell| \le h(x)$ $\quad \lim_{x\to p} h(x) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to p} f(x) = \ell$.

ES. $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$ $\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ ?$

Su $y = mx$ (m fissato) $\qquad f(x,mx) = \dfrac{x^2(mx)}{x^2+(mx)^2} = \dfrac{mx^3}{x^2(1+m^2)} = \dfrac{mx}{1+m^2} \xrightarrow{x\to 0} 0$



Supponiamo di sapere che $\boxed{|xy| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)} \Rightarrow \left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| \le \dfrac{1}{2}$ (*)

Si ha $\quad \left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = |x|\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| \le \dfrac{1}{2}|x| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$

$\Rightarrow$ (Th. carab) $\lim \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

$\Rightarrow$ (Th. carab) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0.$ $\qquad (x,y)\to(0,0)$ $\to 0$

Verifica della stima $\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}$: $(|x|-|y|)^2 \geq 0$

$\quad = x^2+y^2-2|x||y|$

$\Rightarrow |xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$

II) CRITERIO DI ESISTENZA.

Vi siano $l \in \mathbb{R}$ e $h(\rho)$:

$$|f(p_1+\rho\cos t, p_2+\rho\sin t) - l| \leq h(\rho)$$

dipende solo da ρ

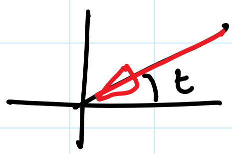
e $\lim_{\rho\to 0} h(\rho) = 0$

Allora

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to p} f(x,y) = l.}$$

ES. $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \qquad (x,y)\neq(0,0)$

$$f(\rho\cos t, \rho\sin t) = \frac{\rho^3\cos^2 t\sin t}{\rho^2\cos^2 t+\rho^2\sin^2 t} = \frac{\rho^3\cos^2 t \sin t}{\rho^2} = \rho\cos^2 t\sin t$$



$$|f(\rho\cos t, \rho\sin t) - 0| = |\rho\cos^2 t\sin t| \leq \rho$$

NON DIPENDE da t

$\rho \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$

ES. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \qquad (x,y) \neq (0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

$$f(\rho\cos t, \rho\sin t) = \frac{\rho^2\cos^2 t\, \rho^2\sin^2 t}{\rho^2} = \rho^2\cos^2 t \sin^2 t$$

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos t, \rho\sin t) = 0 \qquad \forall t \text{ fissato}$$

ciò non basta per provare che il limite è 0.

Tuttavia $|f(\rho\cos t, \rho\sin t)| = |\rho^2\cos^2 t\sin^2 t| \leq \rho^2$

ρ^2: • $\xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$ • Non dipende da t

Ciò prova che $\lim_{(0,0)} f(x,y) = 0$.

OSS. Valgono le asintoticità dell'Analisi 1:

- se $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to P]{} 0 \Rightarrow \sin(f(x,y)) \underset{P}{\sim} f(x,y)$

$$\left[\lim_{(x,y)\to P} \frac{\sin(f(x,y))}{f(x,y)} = 1 \right]$$

ES. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$ $\qquad x^2y \to 0$ in $(0,0)$ $\Rightarrow \sin(x^2y) \underset{(0,0)}{\sim} x^2y$

$$\| $$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0 \text{ (vedi sopra)}$$

- $\lg(1+f(x,y)) \sim f(x,y)$

ES. $\lg(1+x^4+y^4) \sim x^4+y^4$

Es. $\lg(1+x^4+y^4) \underset{(0,0)}{\sim} x^4+y^4$