ES. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{xy\,(2y^2+x^3)}{x^4+y^2}}_{f(x,y)}$$

Vediamo di "indovinare" il limite.

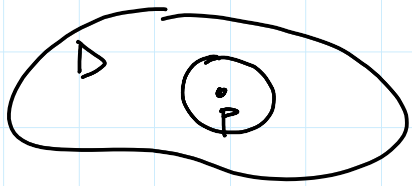
- $x=0$ $\quad f(0,y)\equiv 0 \xrightarrow[y\to 0]{} 0$
- $y=0$ $\quad f(x,0)\equiv 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
- $y=mx$ $\quad m\in\mathbb{R}$ $\quad \dfrac{\cancel{x}\,(m\cancel{x})\,(2m^2x^2+x^3)}{x^{\cancel{4}\,2}+m^2\cancel{x^2}}$

$$= \frac{m\,(2m^2x^2+x^3)}{x^2+m^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

DERIVATA DIREZIONALE di una funzione rispetto ad un vettore.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$p \in \mathring{D}$



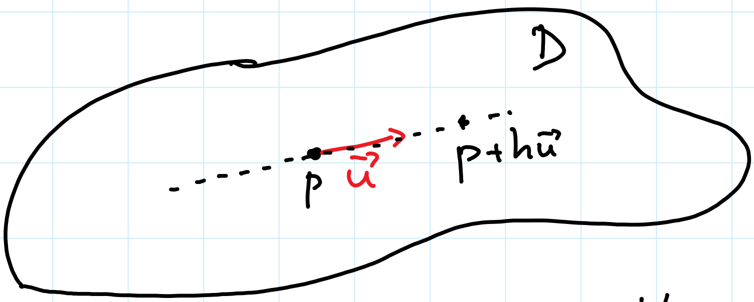
$\mathring{D}$ = il più grande aperto contenuto in D.

$p \in \mathring{D} \iff \exists\, r > 0 \quad B(p, r[\ \subseteq D.$

$\vec{u} \in \mathbb{R}^n \quad \|\vec{u}\| = 1.$

DEF. La derivata direzionale di f in p lungo $\vec{u}$ è (se esiste finito)

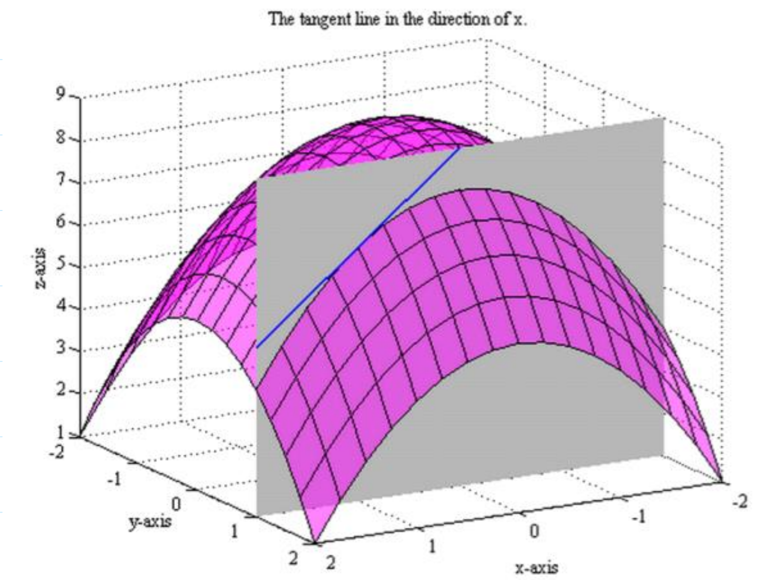
$$\begin{array}{l} D_{\vec{u}} f(p) \\ \partial_{\vec{u}} f(p) \end{array} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + h\vec{u}) - f(p)}{h}$$



OSS : Posto $g(t) = f(p + t\vec{u})$

$$D_{\vec{u}} f(p) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0)$$

Le derivate direzionali sono delle derivate.



ESEMPIO. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Sia $\vec{u} = (u_1, u_2)$ $\quad \|\vec{u}\| = 1$ $\quad (u_1^2 + u_2^2 = 1)$

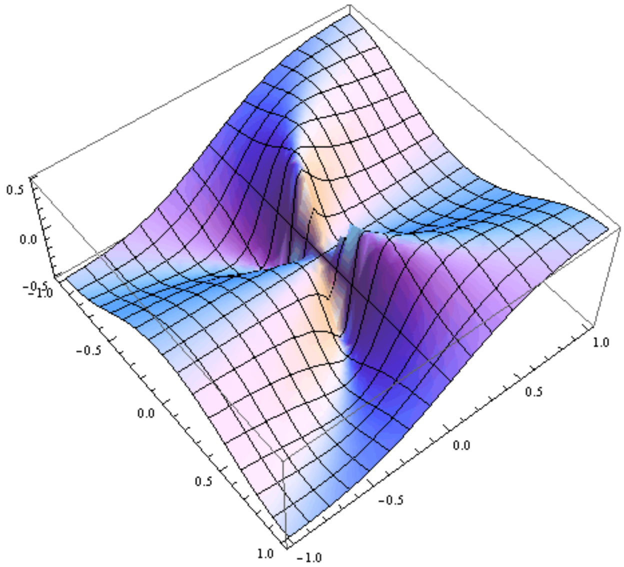
Calcoliamo, se esiste, $\partial_{\vec{u}} f(0,0)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h\vec{u}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hu_1, hu_2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{(h^2u_1^2)(hu_2)}{h^4u_1^4 + h^2u_2^2} = \lim_{h\to 0} \frac{u_1^2 u_2}{h^2u_1^4 + u_2^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } u_2 = 0 \\ u_1^2/u_2 & \text{se } u_2 \neq 0 \end{cases}$$

In questo esempio f NON ha limite in $(0,0)$ (in particolare non è continua in $(0,0)$) ma f ammette derivate direzionali lungo ogni.

direzione !.



CASO PARTICOLARE: le derivate parziali.

Si indica

$$\partial_{x_i} f(P) = D_{\vec{e}_i} f(P) \quad , \text{ dove}$$

$(\vec{e}_1, .., \vec{e}_n)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$

Si tratta delle derivata in p_i di

$$x \longmapsto f(p_1, p_2, .., p_{i-1}, x, p_{i+1}, .., p_n)$$

Infatti ($n=2$)

$$\partial_{x_1} f(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + t\vec{e}_1) - f(p)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(p_1 + t, p_2) - f(p_1, p_2)}{t}$$

$$\underset{x = p_1 + t}{\overset{\nearrow}{=}} \lim_{x \to p_1} \frac{f(x, p_2) - f(p_1, p_2)}{x - p_1}$$

Es. $f(x,y) = x^2 y + x \sin 3y$

$$\partial_x f(x,y) = 2xy + \sin 3y \; ; \; \partial_y f(x,y) = x^2 + x(\cos 3y) 3.$$

Applicazione: $f(x,y) = x^2 \lg(1 + y^2)$

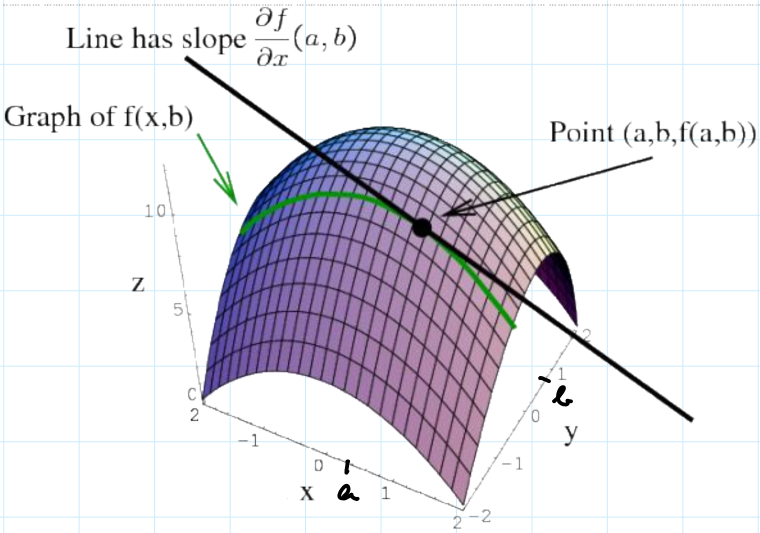
$$D_{\vec{e}_1} f(x,y) = \partial_x f(x,y) = 2x \lg(1 + y^2)$$

$$D_{\vec{e}_2} f(x,y) = \partial_y f(x,y) = x^2 \frac{2y}{1+y^2}$$

OSS. Consideriamo la curva $x \overset{\gamma}{\longmapsto} (x, b, f(x,b))$ $\quad (p=(a,b))$

La derivata di γ in a è

$\gamma'(a) = (1, 0, \partial_x f(a,b))$



DEFINIZIONE (gradiente).

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, p interno a D

Sia f derivabile parzialmente in p rispetto a tutte le n direzioni principali.

Il gradiente di f in p è il VETTORE

$$\nabla f(p) := (\partial_{x_1} f(p), \dots, \partial_{x_n} f(p))$$

ES. $f(x,y) = x^2 + 3xy^3$

$\nabla f(1,2) = ?$ $\qquad \nabla f(1,2) = (\underbrace{\partial_x f(1,2)}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{\partial_y f(1,2)}_{\in \mathbb{R}})$

$\partial_x f(x,y) = 2x + 3y^3$

$\partial_y f(x,y) = 9xy^2$

$\nabla f(1,2) = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2^3, 9 \cdot 1 \cdot 2^2)$

ESEMPIO. $f(x,y) = x^2 + y^2$. $\quad \nabla f(1,1) = ? \quad D_{\vec{u}} f(1,1) = ?$

$\partial_x f(x,y) = 2x \qquad \partial_x f(1,1) = 2$

$\Rightarrow \nabla f(1,1) = (2,2)$

$\partial_x f(x,y) = 2x \qquad \partial_x f(1,1) = 2$

$\partial_y f(x,y) = 2y \qquad \partial_y f(1,1) = 2 \quad \Rightarrow \nabla f(1,1) = (2,2).$

Sia $\vec{u}$ con $\|\vec{u}\| = 1$. $D_{\vec{u}} f(1,1)$: poniamo $g(t) = f((1,1) + t\vec{u})$

$g(t) = f(1+tu_1, 1+tu_2) = (1+tu_1)^2 + (1+tu_2)^2$

$g'(t) = 2(1+tu_1)u_1 + 2(1+tu_2)u_2 \qquad g'(0) = 2u_1 + 2u_2$

$\Rightarrow \boxed{D_{\vec{u}} f(1,1) = 2u_1 + 2u_2} \overset{OSS}{=} \nabla f(1,1) \cdot \vec{u}$

DEF. $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, p interno a D.

Si dice che f è di classe $\mathcal{C}^1$ attorno a p se:

- le derivate parziali di f esistono attorno a p;
- $x \longmapsto \partial_{x_i} f(x)$ è continua in p.

ES. $f(x,y) = x^2 + 3xy^3$ è continua

$\partial_y f(x,y) = 9xy^2$: è continua in $\mathbb{R}^2$

$\partial_x f(x,y) = 2x + 3y^3$ è continua in $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow f$ è $\mathcal{C}^1$ in $\mathbb{R}^2$.

ES. Derivate direzionali di $f(x,y) = \sin(x^2 + y^3 + xy)$

- $f(x,y)$ è continua.
- $\underset{\substack{\uparrow \\ y \text{ fissato}}}{x \longmapsto} f(x,y)$ e $\underset{\substack{\uparrow \\ x \text{ fissato}}}{y \longmapsto} f(x,y)$ sono di classe $\mathcal{C}^\infty$

$\partial_x f(\bar{x},\bar{y})$ = derivata di $x \longmapsto \sin(x^2 + \bar{y}^3 + x\bar{y})$ in $\bar{x}$

$= \cos(x^2 + \bar{y}^3 + x\bar{y})_{x=\bar{x}} \; (2x + 0 + \bar{y})_{x=\bar{x}}$

$= \cos(\bar{x}^2 + \bar{y}^3 + \bar{x}\bar{y})(2\bar{x} + \bar{y})$

$$\boxed{\partial_x f(x,y) = \cos(x^2+y^3+xy)(2x+y)}$$

$\partial_y f(x,y) =$ derivata di $y \longmapsto \sin(x^2+y^3+xy)$
x FISSATO

$$= \cos(x^2+y^3+xy)(0+3y^2+x)$$

ESEMPIO. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

1) f è continua in $(0,0)$?

Coord. polari: $f(\rho\cos t, \rho\sin t) = \rho\cos^3 t \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$

$$|f(\rho\cos t, \rho\sin t) - 0| = |\rho\cos^3 t| \le \rho \longrightarrow 0$$

non dip. da t

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

Modo 2 $\quad \left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right| = |x|\left|\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right| \le |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$

2) Derivate direzionali. Fissato $\vec{u} = (u_1, u_2)$ con $\|\vec{u}\| = 1$ (cioè $u_1^2+u_2^2 = 1$) si ha

$$D_{\vec{u}} f(0,0) \underset{(\text{se esiste})}{=} \begin{cases} \lim_{t\to 0} \dfrac{f(t\vec{u}) - f(0,0)}{t} & (1) \\ g'(0) \qquad g(t) = f(t\vec{u}). \end{cases}$$

$$f(t\vec{u}) = f(tu_1, tu_2) = \frac{t^3u_1^3}{t^2(u_1^2+u_2^2)} = \frac{t^3u_1^3}{t^2} = tu_1^3$$

$$\frac{f(t\vec{u})}{t} = u_1^3 \xrightarrow[t\to 0]{} u_1^3 \Rightarrow D_{\vec{u}} f(0,0) = u_1^3$$

OSS. Per calcolare $\partial_x f(0,0)$ la tentazione è di calcolare $\partial_x f(x,y)$ per $(x,y) \neq (0,0)$ e di fare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(0,0)$:

in questo caso, se $(x,y) \neq (0,0)$ viene

$$\partial_x f(x,y) = \partial_x \left(\frac{x^3}{x^2+y^2} \right) = \frac{3x^2 (x^2+y^2) - 2x\,x^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Il metodo ha due svantaggi:

1) si deve calcolare un limite di f. di più variabili

2) Se anche esiste $\lim_{x\to p} \partial_{\vec{u}} f(x)$ non è detto che esista $\partial_{\vec{u}} f(p)$.

ESERCIZIO. Stesse domande dell'esercizio precedente con

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

{Sugg: Evitare di calcolare $\partial_x f(0,0)$ calcolando $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y)$ }

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} \qquad f(x,0)\equiv 0 \qquad f(0,0)=0$$

$$= \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

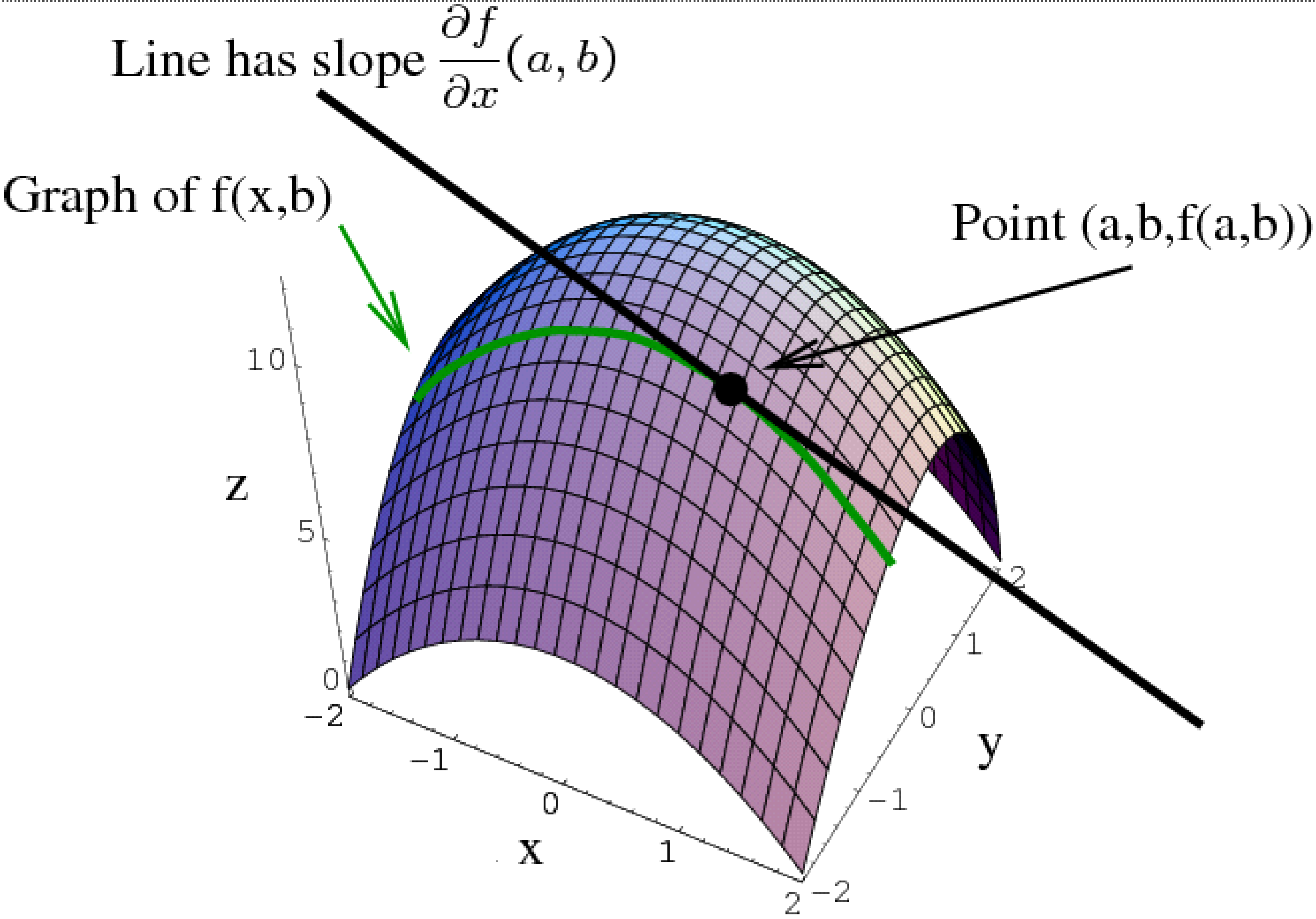
OSSERVAZIONE.

$$\partial_x f(x,y) = \frac{(2xy)(x^2+y^2) - x^2y\,(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{?}$$

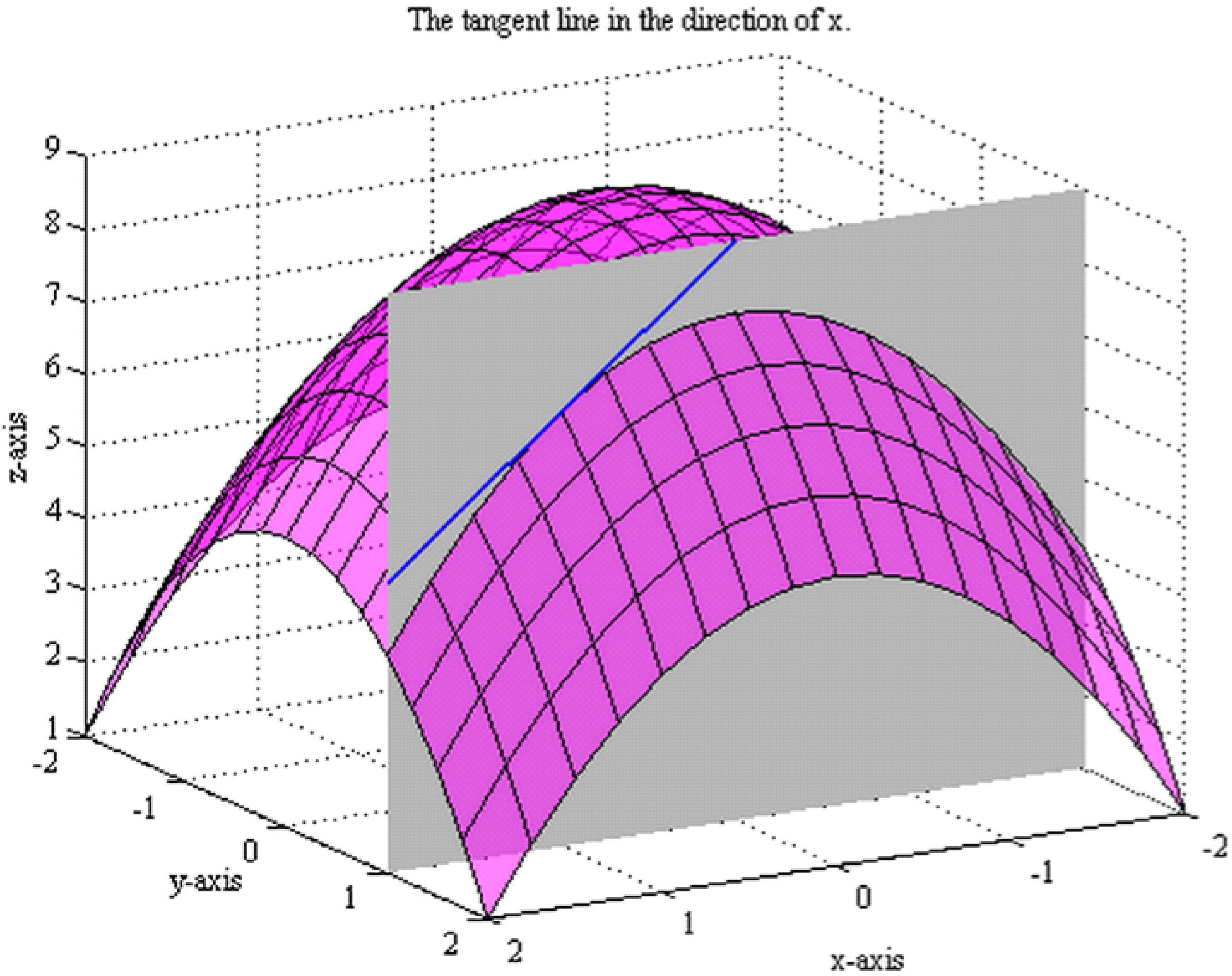
$$y=mx: \qquad \frac{2x\,m^3x^3}{(x^2+m^2x^2)^2} = \frac{2m^3\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}(1+m^2)^2} = \frac{2m^3}{(1+m^2)^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y) \text{ NON ESISTE !}$$

Morale: in questi casi usare la definizione!



Line has slope $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$
Graph of f(x,b)
Point (a,b,f(a,b))
10
z
5
0
−2
−1
0
x
1
2
−2
−1
0
y
1
2


The tangent line in the direction of x.
z-axis
y-axis
x-axis
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-2
-1
0
1
2
2
1
0
-1
-2