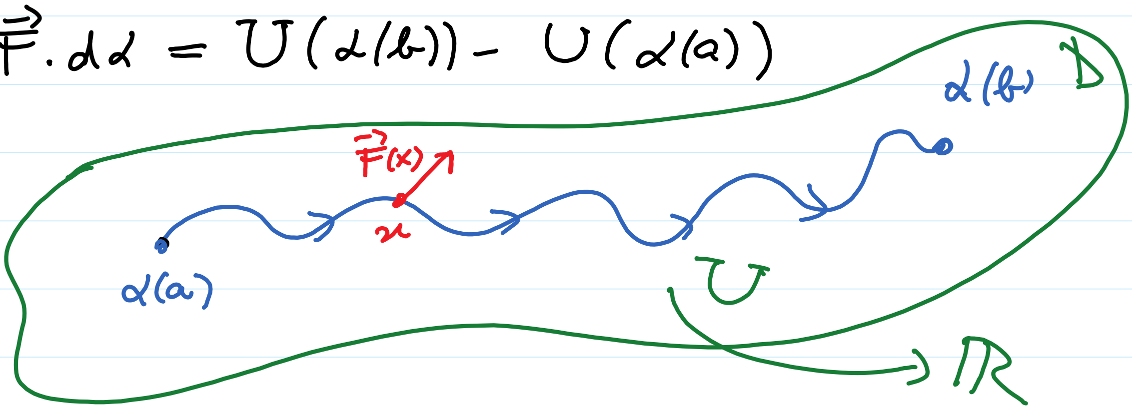
Teorema fondamentale

giovedì 13 ottobre 2016 08:49

TEOREMA FONDAMENTALE del CALCOLO per i CAMPI CONSERVATIVI.

Sia $\vec{F}: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ conservativo, U primitiva di $\vec{F}$. Allora, se $\alpha:[a,b] \xrightarrow{\mathcal{C}^1} D$

$$\int_\alpha \vec{F}\cdot d\alpha = U(\alpha(b)) - U(\alpha(a))$$



Dim. $u(t) = U(\alpha(t))$: $[a,b] \xrightarrow{\alpha} D \xrightarrow{U} \mathbb{R}$, $U\circ\alpha$

$$U(\alpha(b)) - U(\alpha(a)) = u(b) - u(a) = \int_a^b u'(t)\,dt$$

$$u'(t) = \nabla U(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)$$

$$U(\alpha(b)) - U(\alpha(a)) = \int_a^b \nabla U(\alpha(t))\bullet \alpha'(t)\,dt = \int_a^b \vec{F}(\alpha(t))\bullet\alpha'(t)\,dt$$

$$= \int_\alpha \vec{F}\cdot d\alpha \qquad \#$$

COROLLARIO (Caratterizzazione dei campi conservativi)

$\vec{F}$ campo conservativo : $D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(\Longrightarrow)$ 1) $\int_\alpha \vec{F}\cdot d\alpha$ dipende solo dai punti iniziali e finali di $\alpha:[a,b]\longrightarrow D$,

$\int_\alpha$ dipende solo dai punti iniziali e finali di $\alpha:[a,b]\to D$

$= \int_\alpha \vec{F}\cdot d\alpha$, con α chiusa

$(\Longleftarrow)$ 2) Se α è chiusa $(\alpha(a)=\alpha(b))$ $\oint_\alpha \vec{F}\cdot d\alpha = 0$

$\alpha:[a,b]\to D$

ESEMPIO. $\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$\oint_\alpha \vec{F}\cdot d\alpha \qquad \alpha(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t\in[0,2\pi]$

$$\int_\alpha \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t}{1}(-\sin t) + \frac{\cos t}{1}\cos t\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi \neq 0$$

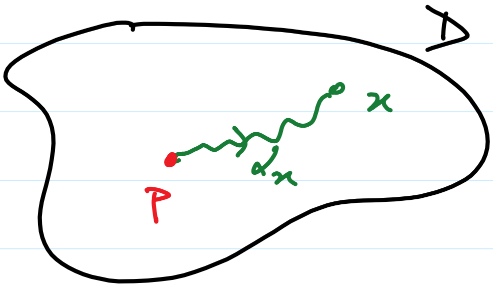
$\Rightarrow \vec{F}$ non è conservativo.

Metodo di integrazione sui cammini per trovare una primitiva.

Th. FOND $\Rightarrow$ se $\vec{F}:D\to\mathbb{R}^n$ è conservativo una primitiva è data da

$$U(x) = \int_{\alpha_x} \vec{F}\cdot d\alpha_x \quad \text{dove} \quad \alpha_x$$

è cammino in D che congiunge un punto fissato $P\in D$ a x.



ESEMPIO. $\vec{F}(x,y)=(x,y)$ è conservativo (irrotazionale in $\mathbb{R}^2$)

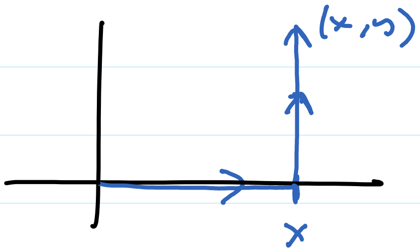
Fissiamo $(0,0)$.

$$U(x,y)=\int_{\alpha_{x,y}} \vec{F}\cdot d\alpha_{x,y}$$

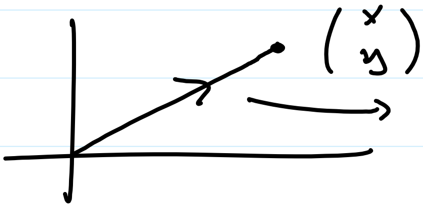
$\alpha_{x,y}$ = curva che congiunge $(0,0)$ a (x,y).

(x,y) FISSATO.

Modo 1: $\alpha_{x,y}$:



Modo 2: $\alpha_{x,y}$:



$\underbrace{t\binom{x}{y}}_{\alpha_{x,y}(t)}$: $t\in[0,1]$.

$$\int_{\alpha_{x,y}} \vec{F}\cdot d\alpha_{x,y} = \int_0^1 \vec{F}(tx,ty)\cdot\binom{x}{y}\,dt$$

$$= \int_0^1 \binom{tx}{ty}\cdot\binom{x}{y}\,dt = \int_0^1 t(x^2+y^2)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

$\Rightarrow U(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ è primitiva di $\vec{F}$.

ESEMPIO. Primitiva di $\vec{F}(x,y)$ con il metodo degli integrali curvilinei

$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} , \frac{x}{x^2+y^2} \right)$. Risolviamo

$$\begin{cases} \partial_x U = \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \partial_y U = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases} \rightsquigarrow \partial_y U = \frac{x}{x^2\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)} = \frac{1}{x} \quad \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \quad \boxed{x>0}$$

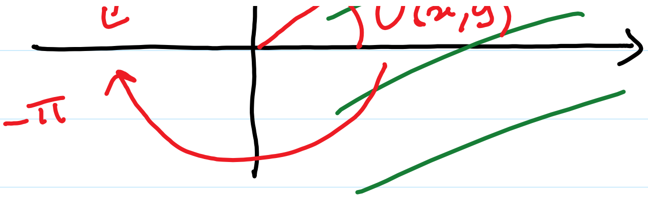
$$\Rightarrow U(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi(x)$$

$$\partial_x U(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \varphi'(x) = \frac{-y}{x^2+y^2} + \varphi'(x) \Rightarrow \varphi'(x) = 0$$

$$\Rightarrow U(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + c \quad \boxed{x>0}$$

U non si può stendere con continuità a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.



CAMPI IRROTAZIONALI

Sia $\vec{F}(x,y)$ conservativo $\Rightarrow \exists U(x,y): \nabla U = \vec{F}$

Se $\vec{F} \in \mathcal{C}^1$ (cioè $U \in \mathcal{C}^2$):

$$\begin{cases} F_1 = \partial_x U(x,y) \longrightarrow \partial_y F_1 = \partial_y(\partial_x U(x,y)) = \boxed{\partial_{x,y} U} \\ F_2 = \partial_y U(x,y) \longrightarrow \partial_x F_2 = \partial_x(\partial_y U(x,y)) = \boxed{\partial_{x,y} U} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \partial_y F_1 = \partial_x F_2$$

In generale se $\vec{F} = (F_1, .., F_n)$ è $\boxed{\mathcal{C}^1}$ e conservativo:

$$\boxed{\partial_{x_i} F_j = \partial_{x_j} F_i \quad \forall i,j}$$

DEF. Sia $\vec{F}: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ campo di classe $\mathcal{C}^1$.
Si dice che $\vec{F}$ è IRROTAZIONALE se

$\vec{F} = (F_1, .., F_n)$ $\quad \boxed{\partial_{x_i} F_j = \partial_{x_j} F_i} \quad \forall i,j$.

Abbiamo quindi provato che

$$\boxed{\vec{F} \in \mathcal{C}^1 + \text{CONSERVATIVO} \Rightarrow \vec{F} \text{ è IRROTAZIONALE}}$$

ES. $\vec{F}(x,y) = (x^2 y, 2y + 5x)$

$\vec{F}$ è irrotazionale?

$\underset{\shortparallel}{\partial_y(x^2 y)} \overset{?}{=} \underset{\shortparallel}{\partial_x(2y + 5x)}$ NO Non è irrotazionale

x^2

Es. $\vec{F}(x,y) = (2y, x)$ è conservativo?

$\vec{F} \in \mathscr{C}^1$: se è conservativo è irrotazionale

$$\underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\partial_y(2y)} \overset{?}{=} \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\partial_x(x)} \Rightarrow \text{non è irrot} \Rightarrow \text{non è conservativo,}$$

Es: $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ $\mathscr{C}^1$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\vec{F}$ irrotazionale? $\partial_y\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) \overset{?}{=} \partial_x\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$

$$\frac{-1(x^2+y^2)+y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \partial_y\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\partial_x\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \,/\!/$$

$\vec{F}$ È IRROTAZIONALE MA NON È CONSERVATIVO!

$\vec{F}$ $\mathscr{C}^1$ CONSERVATIVO $\Rightarrow$ $\vec{F}$ IRROTAZIONALE

Il viceversa è $\boxed{\text{FALSO}}$

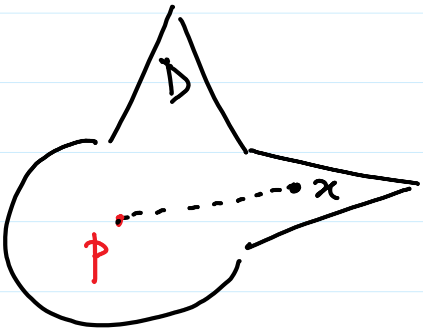
Campi conservativi e campi irrotazionali

giovedì 13 ottobre 2016 09:08

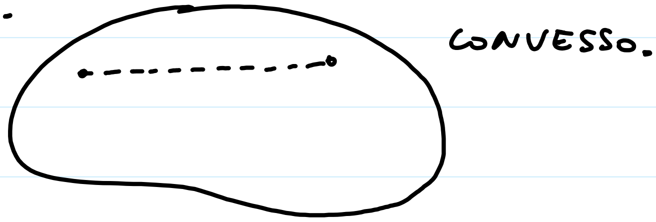
DOMINI STELLATI rispetto ad un punto.

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto si dice stellato rispetto ad un punto $p \in D$ se

$$\forall x \in D \text{ il segmento } [p,x] \subseteq D$$

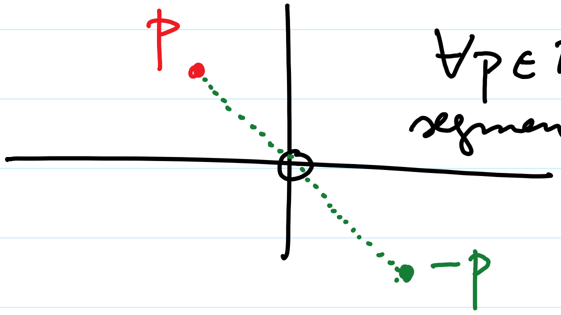


DEF. $D \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso se $\forall p,q \in D$ il segmento $[p,q] \subseteq D$.



CONVESSO ⟹ STELLATO rispetto ad ogni suo punto.

ES. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ NON è stellato rispetto a nessuno dei suoi punti



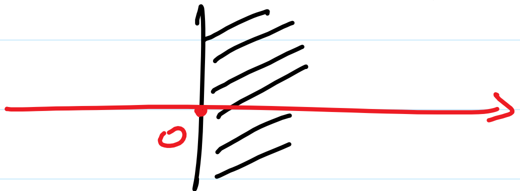
$\forall p \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$ il segmento $[p,-p] \not\subseteq \mathbb{R}^2 \setminus 0$

TEOREMA. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto STELLATO.

Se $\vec{F}: D \to \mathbb{R}^n$ è campo IRROTAZIONALE

TEOREMA. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto STELLATO.
Se $\vec{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è campo IRROTAZIONALE
allora $\vec{F}$ è CONSERVATIVO:
nei domini stellati
IRROTAZIONALE $\Rightarrow$ CONSERVATIVO.

ESEMPIO. $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} , \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
irrot MA non conservativo
Restringiamo il dominio di $\vec{F}$ al semipiano $x>0$
$D = \{(x,y) : x>0\}$.



Esiste quindi in D una primitiva di $\vec{F}$:
$U(x,y)$ tale che
$$\begin{cases} \partial_x U(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ \partial_y U(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

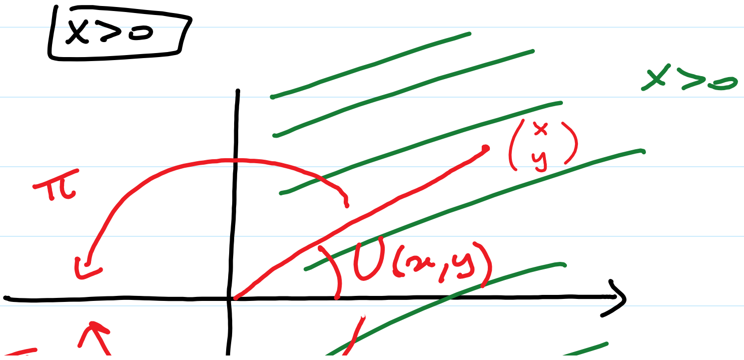
$$\rightsquigarrow \partial_y U = \frac{x}{x^2\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)} = \frac{1}{x} \quad \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \qquad \boxed{x>0}$$

$$\Rightarrow U(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi(x)$$

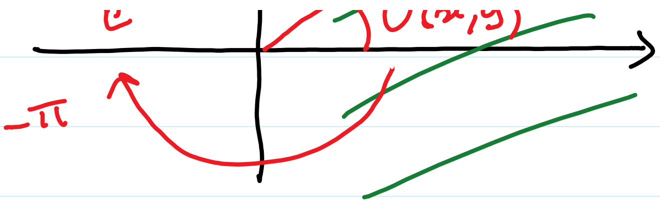
$$\partial_x U(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \varphi'(x) = \frac{-y}{x^2+y^2} + \varphi'(x) \Rightarrow \varphi'(x) = 0$$

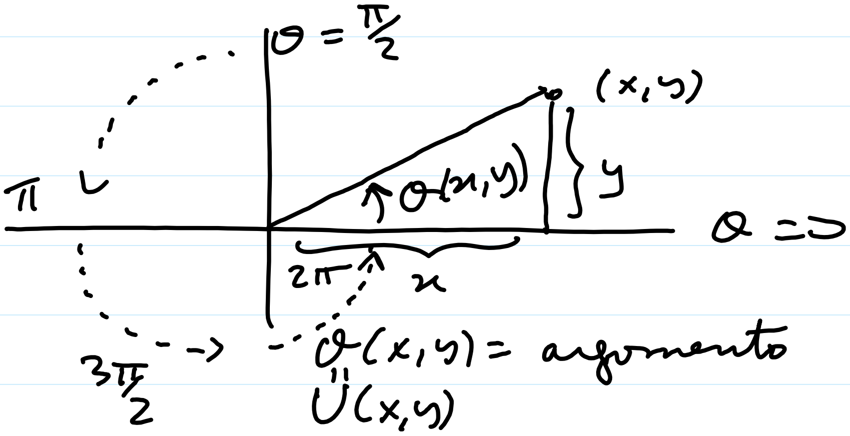
$$\Rightarrow U(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + c \qquad \boxed{x>0}$$

U non si può stendere con continuità a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

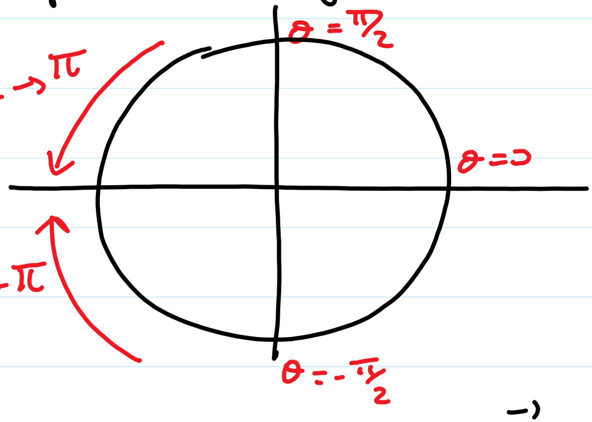


a $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

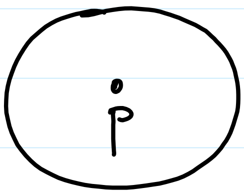




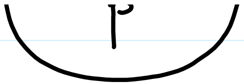
Si capisce perché non c'è una primitiva di $\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ in $\mathbb{R}^2\setminus 0$: "moralmente" il campo è il gradiente dell'argomento $\theta(x,y)$, l'angolo che fa il vettore $\binom{x}{y}$ con l'asse x. L'argomento non si può estendere ad una funzione continua (tantomeno C^1) in $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$: fatto un giro c'è un "salto" di 2π



OSS: Un campo irrotazionale $\vec{F}$ è localmente conservativo: infatti se $p \in D$ aperto esiste $r>0$: $\underbrace{B(p,r]}_{\text{stellato}} \subseteq D$



$\vec{F}$ in $B(p,r]$



$\vec{F}$ in $B(p,r]$ irrotazionale $\Rightarrow$ conservativo.

ESEMPIO. $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x^3}{x^4+y^4}, \frac{y^3}{x^4+y^4} - \frac{1}{1+y^2}\right)$ in $\mathbb{R}^2\setminus 0$

Il campo è irrotazionale (verificarlo:

$$\partial_y\left(\frac{x^3}{x^4+y^4}\right) = \partial_x\left(\frac{y^3}{x^4+y^4} - \frac{1}{1+y^2}\right) \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

Non possiamo concludere che il campo è conservativo.

Sappiamo che il campo è localmente conservativo: cerchiamo una primitiva attorno ad un punto fissato del dominio.

Risolvere
$$\begin{cases} \partial_x U = \dfrac{x^3}{x^4+y^4} & (1) \\ \partial_y U = \dfrac{y^3}{x^4+y^4} - \dfrac{1}{1+y^2} & (2) \end{cases}$$

(1) $U(x,y) = \frac{1}{4}\lg(x^4+y^4) + \varphi(y)$

(2) $\partial_y U(x,y) = \cancel{\frac{y^3}{x^4+y^4}} + \varphi'(y) = \cancel{\frac{y^3}{x^4+y^4}} - \frac{1}{1+y^2}$

$\Rightarrow \varphi'(y) = -\frac{1}{1+y^2} \Rightarrow \varphi(y) = -\operatorname{arctg} y + c.$

$U(x,y) = \frac{1}{4}\lg(x^4+y^4) - \operatorname{arctg} y$ è localmente una primitiva

$$\begin{cases} U \text{ è definita in } \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \Rightarrow \text{è primitiva in } \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}. \\ \partial_x U = \dfrac{x^3}{x^4+y^4}, \quad \partial_y U = \dfrac{y^3}{x^4+y^4} - \dfrac{1}{1+y^2} \end{cases}$$

CAMPI IRROTAZIONALI IN DOMINI "bucati".

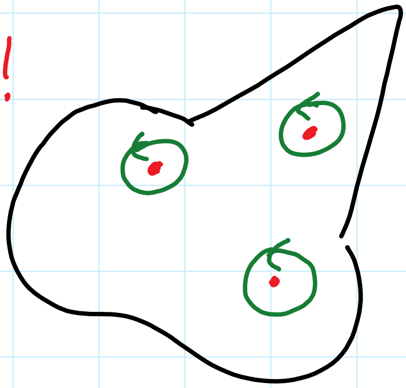
Ω aperto stellato di $\mathbb{R}^2$

$a_1, \dots, a_n \in \Omega$

$D = \Omega \setminus \{a_1, \dots a_n\}$

D NON È STELLATO!

Non è detto che IRROT ⇒ CONSERVATIVO



UN CRITERIO PER CAPIRE SE UN CAMPO IRROT È CONSERVATIVO IN UN DOMINIO BUCATO

Se $\vec{F}: D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ conservativo $\Rightarrow \displaystyle\int_{\partial B(a_i, r)} \vec{F} \cdot d(\partial B(a_i, r)) = 0$

per ogni circolo $\partial B(a_i, r) \subseteq D$

PROP $D = \Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, $\Omega \overset{\subseteq \mathbb{R}^2}{} $ stellato $a_i \in \Omega$.

Sia $\vec{F}: D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ IRROTAZIONALE.

Siano $\gamma_i = \partial B(a_i, r) \subseteq D$.

Se $\displaystyle\int_{\gamma_i} \vec{F} \cdot d\gamma_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots n \Rightarrow \vec{F}$ è CONSERVATIVO.

Siano $\gamma_i = \partial B(a_i, r_i) \subseteq D$.

Se $\displaystyle\int_{\gamma_i} \vec{F} \cdot d\gamma_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots n \Rightarrow \vec{F}$ è CONSERVATIVO.

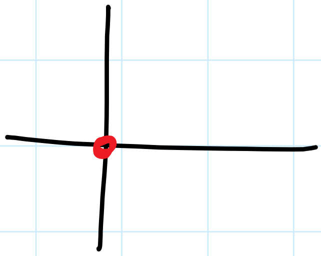
Basta quindi verificare n integrali curvilinei

OSS: In $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ se $\underline{\Omega \subseteq \mathbb{R}^n}$ è stellato si dimostra che se $a_1, \dots, a_n \in \Omega$ allora $D = \Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ è "semplicemente connesso" (ogni circuito in D si può contrarre in D ad un punto con continuità: in parole povere non ci sono pali per legare la bicicletta). In tal caso se $\vec{F}: D \to \mathbb{R}^n$ è irrotazionale allora $\vec{F}$ è conservativo.

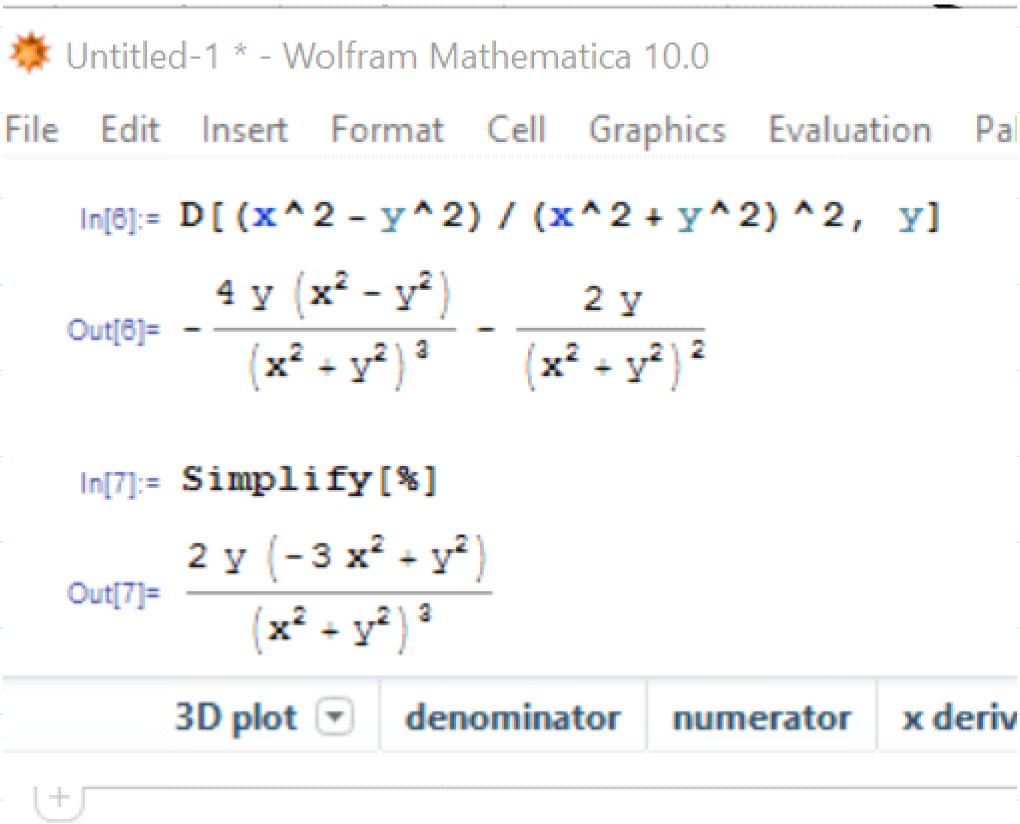
ES. $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right) \qquad (x,y) \neq (0,0)$

- $\vec{F}$ è irrotazionale (verificarlo)
- È conservativo?

Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\alpha \vec{F} \cdot d\alpha$



$\alpha(t) = \left(\cos^3 t + 5, \cos^2 t \sin t + 8 \right) \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

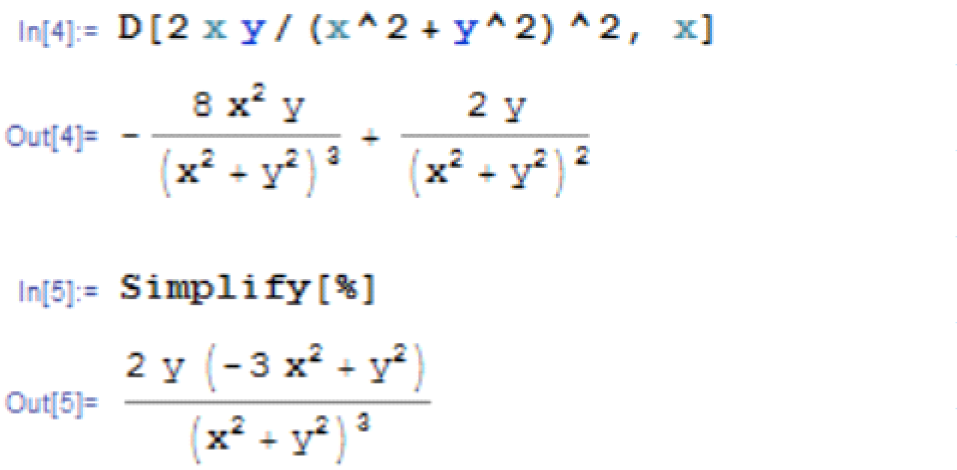


```
In[6]:= D[(x^2 - y^2) / (x^2 + y^2) ^2,  y]
```

$$\text{Out[6]=} \; -\frac{4\,y\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} - \frac{2\,y}{(x^2+y^2)^2}$$

```
In[7]:= Simplify[%]
```

$$\text{Out[7]=} \; \frac{2\,y\,(-3\,x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$



```
In[4]:= D[2 x y / (x^2 + y^2) ^2,  x]
```

$$\text{Out[4]=} \; -\frac{8\,x^2\,y}{(x^2+y^2)^3} + \frac{2\,y}{(x^2+y^2)^2}$$

```
In[5]:= Simplify[%]
```

$$\text{Out[5]=} \; \frac{2\,y\,(-3\,x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

Dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: posto $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$
$t \in [0, 2\pi]$

SE $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = 0$ il campo è conservativo (Th. sui DOMINI BUCATI)

SE $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma \neq 0$ non è conservativo (Th. fond. del calcolo)

Calcoliamo quindi $\int_\gamma \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy$

Calcoliamo quindi $\int_\gamma \frac{\quad}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{\quad}{(x^2+y^2)^2}\,dy$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{1}(-\sin t) + \frac{2\cos t \sin t}{1}\cos t \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\cos^2 t \sin t + \sin^3 t + 2\cos^2 t \sin t \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t + \sin^3 t \, dt = \int_0 \sin t\,(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1})\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin t \, dt = 0 :$$

il campo è conservativo.

- Calcolo di una primitiva di $\vec{F}$.

Trovare $U : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$ tale che

$$\underset{(1)}{\partial_x U(x,y) =} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \; ; \; \underset{(2)}{\partial_y U(x,y) =} \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$(2) \Rightarrow U(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2} + \varphi(x)$$

$$(1) \quad \partial_x\left(\frac{-x}{x^2+y^2} + \varphi(x)\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{-(x^2+y^2)+2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(x) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(x) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \varphi'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = \text{costante}.$$

$$\Rightarrow U(x,y) = \frac{-x}{\quad} + c$$

$$\Rightarrow U(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2} + c$$

- Calcolo di $\int_\alpha \vec{F} \cdot d\alpha = U(\alpha(\frac{\pi}{2})) - U(\alpha(0))$

$$\alpha(t) = (\cos^3 t + 5, \cos^2 t \sin t + 8) \quad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}],$$

$$\alpha(0) = (6, 8) \ ; \quad \alpha(\tfrac{\pi}{2}) = (5, 8)$$

$$\int_\alpha \vec{F} \cdot d\alpha = U(5,8) - U(6,8) \qquad U(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

$$= \ldots\ldots \qquad \#$$